

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL

Matemaatilise füüsika võrrandid

Enno Pasi konspekt

Tallinn
2013 Kevad

Sisukord

1	Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	4
2	Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	5
3	Mitme muutuja teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite klassifikatsioon	11
4	Konstantsete kordajatega lineaarsete võrrandite kanoonilised kujud	13
5	Hüperboolsed võrrandid. Keele võnkumise võrrand	14
6	Hüperboolsed võrrandid. Varda pikivõnkumise võrrand	17
7	Võnkuva keele energia	19
8	Hüperboolsed võrrandid. Elektrilised võnkumised juhtmetes. Telegraafi võrrand	21
9	Hüperboolsed võrrandid. Membraani võnkumise võrrand	22
10	Paraboolsed võrrandid. Soojusliikumise võrrand	24
11	Paraboolsed võrrandid. Difusioonivõrrand	27
12	Elliptilised võrrandid. Protsessid, mida kirjeldab Laplace'i võrrand	29
13	Hüperboolne võrrand. Alg- ja rajatingimused	30
14	Lainete meetod. d'Alembert'i lahend	33
15	d'Alembert'i lahendi geomeetriline tõlgendus	35

16	Mittehomogeense võrrandi lahend	40
17	Lahendi stabiilsus	41
18	Ülesanne poolsirgel. Jätkamise meetod	43
19	Rajaülesanded lõplikul lõigul	48
20	Muutujate eraldamise meetod ehk Fourier' meetod	50
21	Lahendi analüüs	54
22	Suvalise võnkumise esitamine seisevlainete summana	56
23	Mittehomogeenne võrrand	59
24	Ilma algtingimusteta rajaülesanne	63
25	Muutujate eraldamise meetod üldkujul	65
26	Rajaülesanne, mille lisatingimused on antud karakteristikutel	69
27	Karakteristikutel antud lisatingimustega ülesande lahendamine lähendusmeetodil	73
28	Paraboolse võrrandi rajaülesanded	74
29	Maksimumprintsii	76
30	Muutujate eraldamise meetod soojusjuhtivusvõrrandi korral	78
31	Mittehomogeenne soojusjuhtivusvõrrand	81
32	Soojusjuhtivusülesanne sirgel	84

33 Elliptilised võrrandid	89
34 Laplace'i võrrandi fundamentaallahendid	91
35 Harmoonilised funktsioonid	92
36 Raadiusvektorite teisendus	94
37 Greeni valemid	95
38 Harmoonilise funktsiooni omadused	99

1 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Võrrandit, mis sisaldab otsitavat funktsiooni $u(x_1, \dots, x_n)$ ja selle osatuletisi nimetatakse **osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks** (lühidalt ODV).

Esimest järku ODV

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

Teist järku ODV

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) = 0 \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

Kõrgemat järku ODV

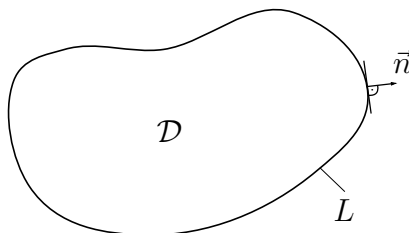
$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}^{s_1} \partial x_{i_2}^{s_2} \dots \partial x_{i_j}^{s_j}}\right) = 0 \quad (1.3)$$

Võrrandi erilahendi leidmiseks tuleb võrrandile lisada rajatingimusi või/ja algtingimusi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y) \quad u = \int f(x, y) dx$$

$$u = F(x, y) + g(y) \quad g(y) \text{ on tundmatu funktsioon}$$

Vaatame kahemuutujafunktsioone $u(x, y)$ piirkonnas \mathcal{D} rajajoonega L , mille normaal on \vec{n} . Rajatingimustega määratakse funktsiooni käitumine uuritava piirkonna rajajoonel.



$$\begin{aligned} u \Big|_L &= \varphi(x, y) && \text{I liiki rajatingimus, Dirichlet' ülesanne} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_L &= g(x, y) && \text{II liiki rajatingimus, Neumeanni ülesanne} \\ (u + \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}) \Big|_L &= h(x, y) && \text{III liiki rajatingimus, Robini ülesanne} \end{aligned}$$

Algtingimused ehk Cauchy tingimused kirjeldavad uuritavat protsessi meid huvitava ajavahemiku alguses, s.t alghetkel $t = 0$. Kui u on $u = u(x, t)$, siis

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = \mu(0)$$

2 Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Vaatleme võrrandit

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (2.1)$$

Edaspidi tähistame $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$. Seega

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (2.1')$$

Võrrandit (2.1) nimetatakse **lineaarseks**, kui see on lineaarne lahendi u ning selle osatuletiste suhtes, st. osatuletised on esimeses astmes, kordajad sõltuvad vaid sõltumatudest muutujatest x, y .

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (2.2)$$

kus a_{ij}, b_i, c ja f sõltuvad (x, y) -st. **Kõrgemat järku tuletiste suhtes lineaarne** võrrand on kujul

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (2.3)$$

kus a_{ij} sõltuvad (x, y) -st. Kui kordajad a_{ij} sõltuvad peale x, y -i ka u -st ja tema esimest järku osatuletistest, siis on võrrand **kvaasilineaarne**. Juhul kui $f \equiv 0$, nimetatakse võrrandit **homogeenseks**.

Vaatleme teisendust

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad (2.4)$$

kus φ ja ψ on kaks korda pidevalt diferentseeruvad. Püüame leida niisuguse muutujate vahetuse, mille korral diferentsiaalvõrrand saab lihtsaima kuju. Vaatleme lähemalt võrrandit (2.3). Diferentseerime funktsiooni $u(\xi, \eta)$ x ja y järgi, eeldades, et ξ, η on antud võrdusega (2.4)

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

Saab kirjutada

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (2.5)$$

kus

$$\begin{aligned}\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\eta_y + a_{22}\xi_y^2 \\ \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ \bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2\end{aligned}$$

ja \bar{F} ei sõltu u teist järku osatuletistest. Saab näidata, et kui F on lineaarne, siis on ka \bar{F} lineaarne.

Valime ξ ja η nii, et kordaja $\bar{a}_{11} = 0$.

Vaatleme esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandit

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \quad (2.6)$$

Olgu $z = \varphi(x, y)$ selle võrrandi üheks lahendiks. Kui võtta $\xi = \varphi(x, y)$, siis on selge, et $\bar{a}_{11} = 0$.

Lemma 2.1. *Funktsioon $z = \varphi(x, y)$ on võrrandi (2.6) lahendiks siis ja ainult siis, kui funktsioon $\varphi(x, y) = C$ on tavalise diferentsiaalvõrrandi*

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0 \quad (2.7)$$

üldlahendiks (üldintegraaliks)

Tõestus. Tarvilikkus

Sellest, et $z = \varphi(x, y)$ on (2.6) lahend järeldub, et $\varphi(x, y) = C$ on (2.7) üldlahend.

Jagame (2.6) mõlemad pooled z_y^2 -ga

$$a_{11} \left(\frac{z_x}{z_y} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{z_x}{z_y} \right) + a_{22} = 0$$

ehk

$$a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0$$

$\varphi(x, y)$ on (2.7) üldlahendiks, kui selle võrduse abil esitatud ilmutamata funktsioon rahuldab võrrandit (2.7). Ilmutamata funktsiooni tuletis on $y' = \frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}$

Võrrandi (2.7) saab esitada kujul (jagame dx^2 -ga)

$$a_{11} \frac{d^2 y}{dx^2} - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0$$

Seega saame

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0$$

Mida oligi tarvis tõestada, sest $z = \varphi(x, y)$ on (2.6) lahend

□

Tõestus. Piisavus

Eeldame, et $\varphi(x, y) = C$ on (2.7) lahend, siis sellest järeldub, et $z = \varphi(x, y)$ on lahend ka (2.6)-le. Olgu $P(x_0, y_0)$ mingi punkt, mida läbib integraaljoon $\varphi(x, y) = C_0$, seega $\varphi(x_0, y_0) = C_0$. Selle lahendi tuletis

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

Esitades võrrandi (2.7) kujul

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = 0$$

asendades tuletise leiame

$$a_{11}(y')^2 - 2a_{12}y' + a_{22} = a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0$$

Võtame $x = x_0, y = y_0$ ja korrutame $(\varphi_y(x_0, y_0))^2 = \left(\varphi_y \Big|_P \right)^2$ -ga. Saame

$$a_{11} \left(\varphi_x \Big|_P \right)^2 + 2a_{12} \varphi_x \Big|_P \varphi_y \Big|_P + a_{22} \left(\varphi_y \Big|_P \right)^2 = 0$$

Kuna $z = (x_0, y_0)$ oli vabalt valitud, siis $z = \varphi(x, y)$ on (2.6) lahend

□

Võrrandit (2.7) nimetatakse võrrandi (2.6) **karakteristiliseks võrrandiks** ja selle lahendeid **karakteristikuteks**.

Võttes $\xi = \varphi(x, y)$, kus $\varphi(x, y) = C$ on võrrandi (2.7) üldintegraal (lahend), muudame tuletise $u_{\xi\xi}$ kordaja nulliks. Kui $\psi(x, y) = C$ on võrrandi (2.7) teine sõltumatu üldintegraal (lahend), siis võttes $\eta = \psi(x, y)$ saame nulliks muuta ka $u_{\eta\eta}$ kordaja.

Karakteristiline võrrand (2.7) on ruutvõrrand tuletise $y' = \frac{dy}{dx}$ suhtes

$$y' = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (2.8)$$

Diskriminandi märk

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix}$$

määrab võrrandi (2.3) liigi. Punktis $P(x, y)$ on võrrand (2.3)

hüperboolne, kui $D > 0$

paraboolne, kui $D = 0$

elliptiline, kui $D < 0$

Saab näidata, et kehtib võrdus

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \cdot J^2, \quad (2.9)$$

kus

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

on võrduse (2.4) Jakobiaan. Võrdusest (2.9) järeldeb võrrandi tüübi invariantsus (muutumatus) muutujate teisenduse suhtes. Vaadeldava piirkonna erinevates punktides võib võrrandi tüüp olla erinev.

Olgu piirkonna \mathcal{D} kõigis punktides võrrand sama tüüpi. Piirkonna iga punkti läbib kaks karakteristikut

hüperboolne, 2 reaalselt erinevat karakteristikut

paraboolne, 2 reaalselt kokkulangevat karakteristikut

elliptiline, 2 kompleksset karakteristikut

Teist järku jooned

$$\underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{ruutvorm}} + b_1x + b_2y + c = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$z^T A z = (x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ellips}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{hüperbool}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 2py \\ y^2 = 2px \end{array} \right\} \text{parabool}$$

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -A$$

1. Hüperboolne võrrand

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} > 0$$

Tuletise

$$y' = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}$$

väärtused on reaalsed ja erinevad. Selle võrrandi lineaarselt sõltumatud üldintegraalid

$$\varphi(x, y) = C \quad \text{ja} \quad \psi(x, y) = C$$

määravad reaalsete karakteristikute parved. Võttes

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{ja} \quad \eta = \psi(x, y)$$

saame võrrandi kujuks

$$u_{\xi\eta} = \phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \tag{2.10}$$

kus $\phi = -\frac{F}{2\bar{a}_{12}}$, see on hüperboolse võrrandi I kanooniline kuju. Sageli kasutatakse ka II kanoonilist kuju. Võtame

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

kus $\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ ja $\beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$, siis

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta) \\ u_\eta &= \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta) \\ u_{\xi\eta} &= \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}) \end{aligned}$$

sellest järeldub

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \phi_1, \quad \phi_1 = 4\phi \quad (2.11)$$

2. Paraboolne võrrand

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

millest $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$. Karakteristlik võrrand, millest saame leida üldlahendi on $y' = \frac{a_{12}}{a_{11}}$. Võtame

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

kus $\eta(x, y)$ on suvaline $\varphi(x, y)$ -st sõltumatu funktsioon. Sel juhul

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$

ja

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0 \end{aligned}$$

Jagades võrrandi mõlemad pooled $u_{\eta\eta}$ kordajaga \bar{a}_{22} saame

$$u_{\eta\eta} = \phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (2.12)$$

kus $\phi = -\frac{F}{\bar{a}_{22}}$. Kui parem pool ei sisalda tuletist u_ξ , siis on see tavaline diferentsiaalvõrrand.

3. Elliptiline võrrand

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$$

Siit on näha, et y' väärtused on kompleksed ja erinevad. Olgu võrrandil $y' = \frac{a_{12} + \sqrt{|D|i}}{a_{11}}$ kompleksne üldintegraal $\varphi(x, y) = C$, siis $\varphi^*(x, y) = C$ on võrrandi $y' = \frac{a_{12} - \sqrt{|D|i}}{a_{11}}$ üldintegraal, kus $\varphi^*(x, y)$ on $\varphi(x, y)$ kaasfunktsioon. Võtame

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \varphi^*(x, y) \end{cases}$$

ja elliptiline võrrand saab sama kanoonilise kuju (2.11) nagu hüperboolne võrrand. Kompleksmuutujatest vabanemiseks teeme teisendused

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) = \operatorname{Re}\varphi, \quad \beta = \frac{1}{2i}(\varphi - \varphi^*) = \operatorname{Im}\varphi,$$

siis

$$\xi = \alpha + \beta i, \quad \eta = \alpha - \beta i$$

sel juhul

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 &= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + \\ &2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0 \end{aligned}$$

Seega $\bar{a}_{12} = 0$, $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$. Võrrand saab kanoonilise kuju

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad (2.13)$$

kus $\phi = -\frac{F}{\bar{a}_{22}}$

3 Mitme muutuja teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite klassifikatsioon

Vaatleme reaalsete kordajatega lineaarset võrrandit

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (3.1)$$

milles a, b, c ja f on n -muutuja x_1, \dots, x_n funktsioonid. Teeme muutujate teisenduse

$$\xi_k = \xi_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

siis saame diferentseerides

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} \alpha_{ik},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_{\xi_k \xi_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^n u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j},$$

kus $\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$. Asendades esialgsesse võrrandisse, saame

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu = f, \quad (3.3)$$

kus

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl} \quad \bar{b}_k = ?$$

Võrrandi pealiikmed, mis sisaldavad kordajaid a_{ij} teisenduvad nagu ruutvormi kordajad. Lineaarse teisenduse abil saab ruutvormi maatriksi teisendada diagonaalkujule, kusjuures

$$|\bar{a}_{ij}| = 1 \text{ või } 0 \quad \bar{a}_{ij} = 0, \text{ kui } i \neq j$$

Inertsiseaduse kohaselt positiivsete, negatiivsete ja nullelementide arv diagonaalil (\bar{a}_{ii}) ei sõltu lineaarteisenduse valikust (on invariantne).

Nimetame võrrandi (3.1) punktis $P(x, y)$

1. **Elliptiliseks**, kui kõik n kordajat \bar{a}_{ii} on sama märgiga
2. **Normaalselt hüperboolseks**, kui $n - 1$ kordajat on sama märgiga ja üks vastasmärgiga
3. **Ultrahüperboolseks**, kui m kordajat on ühe märgiga ja $n - m$ vastasmärgiga ($m, n - m > 1$)
4. **Parapoolseks**, kui kasvõi üks kordajatest \bar{a}_{ii} on null

Kanoonilisteks kujudeks saame

$$\begin{aligned}
 u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n} &= \phi && \text{elliptiline} \\
 u_{x_1x_1} &= \sum_{i=2}^n u_{x_ix_i} + \phi && \text{hüperboolne} \\
 \sum_{i=1}^m u_{x_ix_i} &= \sum_{i=m+1}^n u_{x_ix_i} + \phi && \text{ultrahüperboolne} \\
 \sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i}) &= \phi, \quad m > 0 && \text{paraboolne}
 \end{aligned}$$

4 Konstantsete kordajatega lineaarsete võrrandite kanoonilised kujud

Vaatleme lineaarset teist järku võrrandit

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y) \quad (4.1)$$

kus a_{ij}, b_i, c on konstandid Kanoonilise võrrandi

$$y' = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}, \quad \text{kus } D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix}$$

lahenditeks ehk karakteristikuteks on sirged

$$y = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}} \cdot X + C \quad (4.2)$$

Pärast muutujate teisendamist saame ühe kanoonilistest kujudest

$$\begin{aligned}
 u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu &= f && \text{elliptiline} \\
 u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu &= f && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{hüperboolne} \\
 u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu &= f && \\
 u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu &= f && \text{paraboolne}
 \end{aligned}$$

Esimeseks lihtsustuseks teeme muutujavahetuse

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v = gv \quad (4.3)$$

kus λ ja μ on mingid konstandid.

Leiame

$$u_\xi = g(v_\xi + \lambda v)$$

$$u_\eta = g(v_\eta + \mu v)$$

$$u_{\xi\xi} = g(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v)$$

$$u_{\xi\eta} = g(v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v) u_{\eta\eta} = g(v_{\eta\eta} + 2\lambda v_\eta + \eta^2 v)$$

Asendades elliptilise võrrandi kanoonilisse võrrandisse ning jagades $g = e^{\lambda\xi + \mu\eta}$ -ga saame

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)v_\xi + (b_2 + 2\mu)v_\eta + \overbrace{(\lambda^2 + \mu^2 + b\lambda + b\mu + c)}^\gamma v = f_1$$

Valime λ ja μ nii, et esimeste tuletiste kordajad oleksid nullid $\lambda = -\frac{1}{2}b_1$, $\mu = -\frac{1}{2}b_2$

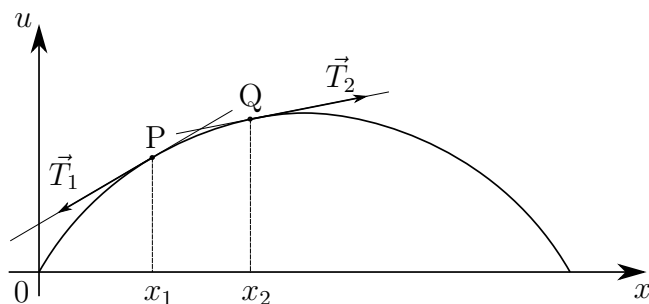
Saame $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v = f_1$

Samamoodi saan teisendada ka teisi võrrandi tüüpe. Saame järgmised kanoonilised kujud

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v &= f && \text{elliptiline} \\ v_{\xi\eta} + \gamma v &= f && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{hüperboolne} \\ v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v &= f && \\ v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta &= f && \text{paraboolne} \end{aligned} \right\}$$

5 Hüperboolsed võrrandid. Keele võnkumise võrrand

Vaatleme pingul keele väikesi võnkumisi. Eeldame, et keel pikkusega l võngub ühes tasapinnas. Keele asendit iseloomustame selle iga punkti nihkega $u(x)$. Leiame punktide



x_1 ja x_2 vahel asuva keele osa pikkuse

$$\Delta s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx$$

$$\sqrt{1 + u_x^2} = (1 + u_x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}u_x^4 + \dots \approx 1$$

Me ei arvesta tuletise u_x suhtes kõrgemat järku liikmeid. Seega keele osa pikkus on ligikaudu $\Delta s \approx x_2 - x_1$. Sel juhul keele pikkus ei muutu võnkumise käigus. Hooke'i seaduse kohaselt on elastsusjõud võrdeline keele pikenemisega. Eelduse kohaselt on keele kõik osad algselt pikenenud ühtemoodi, ning elastsusjõud T on kõikjal ühesugune. See jõud jääb konstantseks kogu võnkumisel, sest me eeldame, et keel ei pikene. Seega $T(x) = T_0 = \text{const}$.

Elastsusjõud T_0 on puutujasuunaline. Võtame võrrandi kirjutamiseks Newtoni II seaduse kujul

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad \text{kus } p = mv \text{ on impulss}$$

$$dp = F dt$$

Keele osa $\Delta x = [x_1, x_2]$ impulss on

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(x, t) \rho(x) dx, \quad \text{kus } \rho \text{ on keele joontihedus}$$

Impulsi muut aja $\Delta t = t_2 - t_1$ jooksul on

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] \rho(x) dx \stackrel{\text{I}}{=} \int_{x_1}^{x_2} u_{tt}(x, \tau) \Delta t \rho(x) dx \quad (5.1)$$

$$\Delta p = F \Delta t$$

Impulsi muut võrdub mõjuva jõu impulsi. Jõuimpulss koosneb elastsusjõu ja välise jõu impulstist. Elastsusjõu impulsi saamiseks leiame elastsusjõu nihke suunalise komponendi

$$T_2(x) = T_0 \overset{\text{II}}{\sin \alpha} \approx T_0 \tan \alpha = T_0 u_x(x, t)$$

^IKasutades lõpliku muudu/Lagrange'i keskväärtusteoreemi $f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$, $c \in (a, b)$, mille alt. kuju on $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\bar{x})\Delta x$, $\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$

mille impuls on

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] dt \stackrel{\text{III}}{=} \int_{t_1}^{t_2} T_0 u_{xx}(\bar{x}, t) \Delta x dt, \quad \bar{x} \in (x_1, x_2) \quad (5.2)$$

Olgu välisjõu tihedus $F(x, t)$, siis selle impuls on

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dx dt \quad (5.3)$$

kuna (5.1) on Δp , (5.2)+(5.3) on kokku $F\Delta t$, saame

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}(x, \tau) \Delta t dx = \int_{t_1}^{t_2} T_0 u_{xx}(\bar{x}, t) \Delta x dt + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dx dt \quad (5.4)$$

Kasutades keskväärtusteoreemi

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x) dx = \Delta x f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in (x_0, x_0 + \Delta x)$$

saame

$$\rho(\bar{x}) u_{tt}(\bar{x}, \tau) \Delta t \Delta x = T_0 u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \Delta x \Delta t + F(\tilde{x}, \tilde{t}) \Delta x \Delta t \quad (5.5)$$

kus $\bar{x}, \bar{x}, \tilde{x} \in (x_1, x_2)$ ja $\tau, \bar{t}, \tilde{t} \in (t_1, t_2)$. Jagame mõlemad pooled $\Delta x \Delta t$ -ga ja läheme üle piirväärtusele, kui $\Delta x \rightarrow 0$ ja $\Delta t \rightarrow 0$

$$\rho(x) u_{tt} = T_0 u_{xx} + F(x, t) \quad (5.6)$$

Kui keel on homogeenne $\rho(x) = \rho = \text{const}$, siis saame

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (5.7)$$

kus $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ ja $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$, siin $f(x, t)$ on välisjõu tihedus massiühiku kohta. Kui välisjõud puudub saame homogeenne võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{või} \quad u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at) \quad (5.8)$$

^{II}Väikese α korral

^{III}kasutades jälle Lagrange'i keskväärtusteoreemi

Võrrand (5.8) kirjeldab vabavõnkumisi. Vaatame juhtu, kui punktis x_0 $x_1 < x_0 < x_2$ mõjub keelele punktjõud $f_0(t)$. Sel juhul saab võrrand (5.4) kuju

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}(x, \tau) \Delta t dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t) dt \quad (5.9)$$

Et integreeritavad funktsioonid on tõkestatud, siis tingimusel, et $x_1 \rightarrow x_0$ ja $x_2 \rightarrow x_0$, muutuvad vasakpoolsed integraalid nulliks ja

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t) dt = 0$$

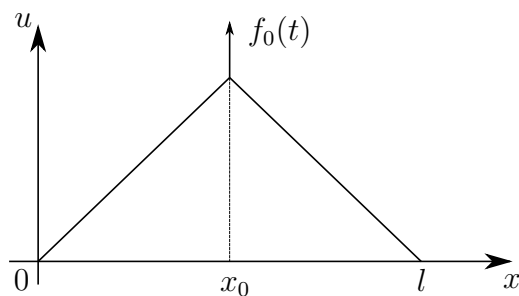
Kasutades keskväärtusteoreemi ning minnes üle piirväärtusele, kui $\Delta t \rightarrow 0$. Leiame

$$u_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) = \frac{1}{T_0} f_0(t) \quad (5.10)$$

Seega punktjõu mõjumisel punktis x_0 on nihkefunktsiooni u esimesel tuletisel u_x katkevus. Seega teist järku diferentsiaalvõrrand selle punktis ei kehti. Selles punktis peavad täidetud olema kaastingimmused

$$\begin{cases} u(x_0 + 0, t) = u(x_0 - 0, t) \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) = -\frac{1}{T_0} f_0(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

Esimene võrdus väljendab keele pidevust ja teine näitab, et keele kuju on nurgapunkt kohal x_0 , nurga suurus sõltub jõust $f_0(t)$ ja elastsusjõust T_0



6 Hüperboolsed võrrandid. Varda pikivõnkumise võrrand

Varda ja vedru pikivõnkumise võrrand on sama. Olgu varras asetatud x -telje suunas lõigul $[0, l]$. Varda pikivõnkumist saab kirjeldada nihkefunktsiooniga $u(x, t)$, mis näitab

tasakaaluasendi punkti x nihet ajamomendil t . Kordinaati x nimetatakse Lagrange'i kordinaadiks, kui see on seotud varda konkreetse füüsilise (materiaalse) punktiga. Ajamomendil t asub see punkt

$$\bar{x} = x + u(x, t)$$

Kui vaadelda konkreetset ruumilist punkti \bar{x} x -teljel, siis läbivad seda erinevatel ajamomentidel erinevad varda punktid x . Kordinaati \bar{x} nimetatakse Euleri kordinaadiks.

$$x = \bar{x} - u(\bar{x}, t)$$

Leiame varda Δx pikkuse elemendi $(x, x + \Delta x)$ suhtelise pikenemise. Selle elemendi otspunktid momendil t on järgmised

$$x + u(x, t) \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$$

Elemendi pikkus

$$x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = \Delta x t$$

Varda elemendi suhteline pikenemine

$$\frac{\Delta x(t) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x} + u(x + \Delta x, t) - u(x, t) - \cancel{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_x(\bar{x}, t)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = u_x(\bar{x}, t),$$

$$\bar{x} \in (x, x + \Delta x)$$

Minnes üle piirväärtusele, kui $\Delta x \rightarrow 0$, saame varda suhtelise pikenemise punktis x .

$$\delta(x) = u_x(x, t)$$

Vastavalt Hooke'i seadusele on elastsusjõud võrdne

$$T(x, t) = K(x)u_x(x, t), \tag{6.1}$$

kus $K(x)$ on elastsusmoodul (Young'i moodul)

Võrrandi saamiseks võrdsustame varda impulsi muudu jõuimpulsiga

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] \rho(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} [K(x_2)u_x(x_2, t) - K(x_1)u_x(x_1, t)] dt + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dx dt \tag{6.2}$$

Lõpliku muudu valemi kohaselt

$$\int_{x_1}^{x_2} u_{tt}(x, \tau) \Delta t \rho(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} (K(x)u_x(x, t))_x \Big|_{x=\bar{x}} \Delta x \Delta t + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dx dt$$

Kasutades keskväärtusteoreemi saame

$$u_{tt}(\bar{x}, \tau) \rho(\bar{x}) \Delta t \Delta x = (K(x)u_x(x, \bar{t}))_x \Big|_{x=\bar{x}} \Delta x \Delta t + F(\tilde{x}, \tilde{t}) \Delta x \Delta t$$

$$\bar{x}, \bar{x}, \tilde{x} \in (x_1, x_2) \quad \tau, \bar{t}, \tilde{t} \in (t_1, t_2)$$

Jagades $\Delta x, \Delta t$ -ga, minnes üle piirväärtusele $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, saame

$$\rho(x)u_{tt} = (K(x)u_x(x, t))_x + F(x, t) \quad (6.3)$$

Kui varras on homogeenne, siis $\rho(x) = \rho$ ja $K(x) = K$ on *Const.*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (6.4)$$

kus $a = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ ja $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$

7 Võnkuva keele energia

Leiame keele koguenergia

$$E = K + U \quad (7.1)$$

kus K - on kineetiline energia, U -potentsiaalne energia.

Keele elemendil pikkusega Δx , mis liigub kiirusega $v = u_t$ on kineetiline energia

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) \Delta x u_t^2$$

Seega kogu keele kineetiline energia on

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) (u_t(x, t))^2 dx \quad (7.2)$$

Keele kuju on määratud nihkefunktsiooniga $u(x, t_0) = u_0(x)$. Keele potentsiaalseks energiaks võib võtta töö, mis on vaja, et viia keel tasakaaluasendist asendisse $u_0(x)$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, t_0) = u_0(x)$$

Keele element Δx läbib aja Δt jooksul elastsusjõudude vahe mõjul

$$T_0 u_x|_{x+\Delta x} - T_0 u_x|_x = T_0 u_{xx}(\bar{x})\Delta x, \quad \text{kus} \quad \bar{x} \in (x, x + \Delta x)$$

Vahemaa

$$u(x, t + \Delta t) - u(x, t) = u_t(x, \tau)\Delta t \quad \tau \in (t, t + \Delta t)$$

Töö, mida teeb kogu keel aja Δt jooksul on

$$\begin{aligned} \left\{ \int T_0 u_{xx} u_t(x, \tau) dx \right\} &\stackrel{I}{=} \left[T_0 u_x u_t(x, \tau) \Big|_{t=\tau} - \int_0^l T_0 u_x u_{t,x}(x, \tau) dx \right] \Delta t \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_{t=\tau} + T_0 u_x u_t(x, \tau) \Big|_0^l \right\} \Delta t \end{aligned}$$

Integreerides t suhtes 0-st t_0 -ni saame

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt \quad (7.3)$$

Vaatleme viimast liiget, kui $x = 0$. $T_0 u_x(0, t)$ on elastsusjõud keele algpunktis ja $u_t(0, t)\Delta t$ - selle otsa nihe. Kui keele otspunkt on kinnitatud, siis on töö nihutuseks otspunktis null.

Töö, mis on vajalik keele viimiseks algseisust $u = 0$ lõppseisu $u_0(x)$ ei sõltu sellest, kuidas seda tehakse ja võrdub

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx$$

Potentsiaalseks energiaks võtame selle töö

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \quad (7.4)$$

Seega keele koguenergia avaldub kujul

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 u_x^2 + \rho(x) u_t^2] dx \quad (7.5)$$

¹Ositi integreerides

Analoogselt saab leida võnkuva varda koguenergia. Elastse varda potentsiaalse energia saab avaldada kujul

$$U = \frac{1}{2} K \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 l_0$$

kus l_0 on varda algpikkus ja l lõpp-pikkus. Siit saame

$$U = \int_0^l K(u_x)^2 dx \quad (7.6)$$

Koguenergiaks saame

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [K u_x^2 + \rho(x) u_t^2] dx \quad (7.7)$$

8 Hüperboolsed võrrandid. Elektrilised võnkumised juhtmetes. Telegraafi võrrand

Elektrivoolu juhtmes iseloomustavad voolutugevus i ja pinge V , mis on punkti koordinaadi x ning aja t funktsioonid

$$i = i(x, t), \quad V = V(x, t)$$

Rakendame Ohmi seadust juhtme osale pikkusega Δx . Pinge lang on võrdne elektromotoorsete jõudude summaga

$$\begin{aligned} V(x, t) - V(x + \Delta x, t) &= -V_x(\tilde{x}, t) \Delta x \\ -V_x(\tilde{x}, t) \Delta x &= iR \Delta x + i_t L \Delta x \end{aligned} \quad (8.1)$$

R on juhtme takistus ja L on induktiivsus pikkusühiku kohta. Juhtme osasse Δx ajavahemiku Δt jooksul saabuv laeng on

$$[i(x, t) - i(x + \Delta x, t)] \Delta t = -i_x(\bar{x}, t) \Delta x \Delta t \quad \bar{x} \in (x, x + \Delta x) \quad (8.2)$$

See laeng läheb juhtmeosa Δx mahtuvuse laadimiseks ja isolatsiooni puudumise tõttu tekkiva kao korvamiseks.

$$\begin{aligned} C [V(x, t + \Delta t) - V(x, t)] \Delta x + G \Delta x V \Delta t &= [C V_t(x, \tau) + G V] \Delta x \Delta t \\ -i_x(\bar{x}, t) \Delta x \Delta t &= [C V_t(x, \tau) + G V] \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (8.3)$$

kus C - on juhtme mahtuvus ja G - kaokoeffitsient pikkusühiku kohta. Eeldame, et voolu kadu on võrdeline pingega. Võrranditest (8.1) ja (8.3) saame moodustada süsteemi

$$\underbrace{\begin{cases} i_x + CV_t + GV = 0 \\ V_x + Li_t + Ri = 0 \end{cases}}_{\text{telegraafi võrrandite süsteem}} \quad (8.4)$$

Saamaks üht võrrandit voolutugevuse i jaoks diferentseerime esimest võrrandit x järgi ja teist t järgi

$$\begin{cases} i_{xx} + CV_{xt} + GV_x = 0 \\ V_{xt} + Li_{tt} + Ri_t = 0 \end{cases}$$

Asendades V_x (8.4) teisest võrrandist ja samuti V_{xt} saame

$$i_{xx} = LCi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi \quad (8.5)$$

Analoogselt saab ka võrrandi pinge V jaoks

$$V_{xx} = LCV_{tt} + (CR + GL)V_t + GRV \quad (5.5')$$

Kui isolatsioonikaod on tühised ja juhtmetakistus väga väike, $G \approx 0$, $R \approx 0$, siis saame võnkumiste võrrandi

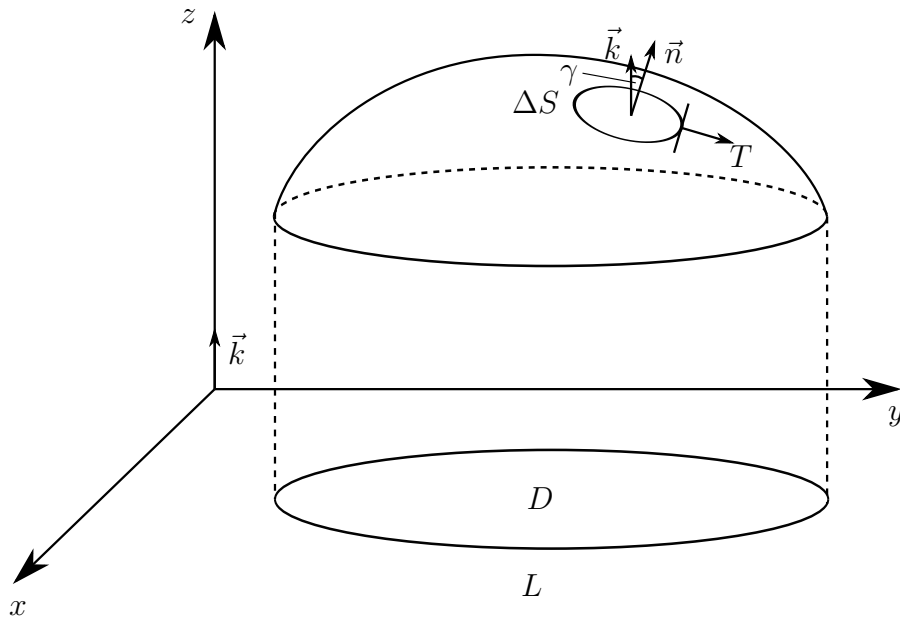
$$V_{tt} = a^2V_{xx} \quad (8.6)$$

kus $a = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

9 Hüperboolsed võrrandid. Membraani võnkumise võrrand

Membraaniks on tasapinnaline kile, mis on kinnitatud tasapinnalisele piirjoonele L . Vaatleme membraani väikeseid ristvõnkumisi. Membraani asendit kirjeldab nihkefunktsioon $u(x, y, t)$. Loeme tühiselt väikesteks kõrgemat järku suurusi tuletiste u_x ja u_y suhtes.

Vaatleme membraani tükikest ΔS , mille piirjoone osale Δl mõjub elastsusjõud ΔlT . Jõu vektor T on ΔS puutetasandil ja risti rajajoonega.



Kui eeldada, et membraani osa deformatsioon on tühiselt väike võnkumisel, siis jääb elastsusjõu komponent, mis on paralleelne (x, y) tasandiga konstantseks T_0 . Membraan-
itüki pindala

$$\Delta S = \iint_{\Delta S_0} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \approx \Delta S_0 \quad (9.1)$$

Elastsusjõu z -telje suunaline komponent on

$$T(z) = T_0 \frac{\partial u}{\partial n}$$

kus $\frac{\partial u}{\partial n}$ on u normaali \vec{n} suunaline tuletis.

Vastavalt impulsi muutumise seadusele

$$\begin{aligned} & \iint_D [u_t(x, t, t_z) - u_t(x, y, t_z)] \rho(x, y) dx dy = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_L T_0 \frac{\partial u}{\partial n} dl dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_D F(x, y) dx dy dt \end{aligned} \quad (9.2)$$

Kus $\rho(x, y)$ on membraani pindtihedus ja $F(x, y, t)$ - välisjõu tihedus pindalaühiku kohta.

Kasutame Gauss-Ostrogradski valemit

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \iint_S (u_{xx} + u_{yy}) dx dy$$

leiame

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_D [\rho u_{tt} - T_0(u_{xx} + u_{yy}) - F(x, y, t)] dx dy dt = 0$$

Siit järeldub, et integraali alune avaldis on konstantselt null, mis annabki membraani võrrani.

$$\rho u_{tt} = T_0(u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t) \quad (9.3)$$

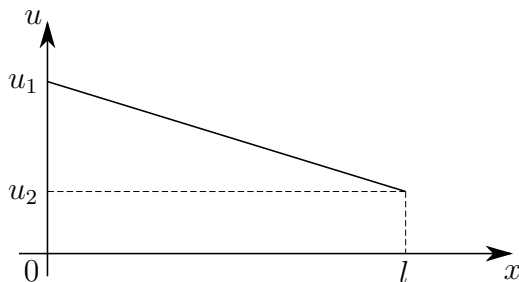
Homogeense membraani korral $\rho(x, y) = \text{Const}$ saame

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad (9.4)$$

kus $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ ja $f(x, y, t) = \frac{1}{\rho} F(x, y, t)$

10 Paraboolsed võrrandid. Soojusliikumise võrrand

Vaatleme varrast pikkusega l , mis on külgedelt soojuslikult isoleeritud. Eeldame, et var-
da läbimõõt on piisavalt väike, et igal ajamomendil t on temperatuur var-
da ristlõikes ühesugune. Parema ülevaate saab [1], lk 28. Kui var-
da otsi hoida konstantsetel tem-



peratuuridel u_1 ja u_2 , siis jaotub temperatuur homogeenses vardas lineaarselt.

$$u(x) = u_1 + \frac{1}{l}(u_2 - u_1)x \quad (10.1)$$

Soojus liigub soojemalt külmemale poole. Soojushulk, mis läbib var-
da ristlõiget ajaühiku jooksul on võrdne

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k u_x(\bar{x}, t) S, \quad \bar{x} \in (0, l) \quad (10.2)$$

kus k on soojusjuhtivuse koefitsient. Loeme soojusvoo positiivseks, kui see liigub x -
telje positiivses suunas.

1. **Fourier' seadus:** Kui keha soojus on ebaühtlane, siis tekivad soojusvood soojematest osadest jahedamatesse. Soojushulk, mis läbib ristlõiget x ajavahemiku $(t, t + \Delta t)$ jooksul on

$$\Delta Q = q S \Delta t \quad (10.3)$$

kus

$$q = -k(x) u_x \quad (10.4)$$

on soojusvoo tihedus, mis võrdub soojusvooga ajaühikus läbi pindalaühiku.

Integreerides võrdust (10.3), saame seaduse, mis üldistab (10.2)-e

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k(x) u_x(x, t) dt \quad (10.5)$$

See on soojushulk, mis läbib ristlõiget kohal x ajavahemikus (t_1, t_2) .

2. Soojushulk, mis on vajalik ühtlasest materjalist keha temperatuuri tõstmiseks Δu võrra on

$$Q = C m \Delta u = C \rho V \Delta u, \quad (10.6)$$

kus C on soojusmahtuvus, ρ - tihedus, m - mass, V - ruumala.

Kui varda erinevates osades on temperatuuri muut erinev või varras ei ole homogeenne, siis

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} C \rho(x) S \Delta u(x) dx \quad (10.7)$$

3. Varda sees võib soojus tekkida või kaduda (elektrivoolu, keemiliste reaktsioonide jne toimel). Seda iseloomustatakse soojusallikate tihedusega $F(x, t)$. Eralduv või neelduv soojushulk

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt \quad (10.8)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} S dx = V$$

Moodustame soojushulkade tasakaaluvõrrandi lõigul $[x_1, x_2]$ ajavahemikus (t_1, t_2) võrranditest (10.5), (10.7) ja (10.8) jagades viimased läbi S -ga

$$\int_{t_1}^{t_2} [k(x_2) u_x(x_2, t) - k(x_1) u_x(x_1, t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt = \int_{x_1}^{x_2} C \rho(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx$$

Kasutades lõpliku muudu (Lagrange'i) valemit, saame

$$\int_{t_1}^{t_2} (k u_x)_x \Big|_{x=\bar{x}} \Delta x dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt = \int_{x_1}^{x_2} C \rho u_t(x, \tau) \Delta t dx, \quad (10.9)$$

kus $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ ja $\tau \in (t_1, t_2)$. Kasutades keskvaartusteoreemi ja jagades võrduse mõlemaid pooli $\Delta x \Delta t$ -ga, minnes üle piirväärtusele $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$, saamegi soojusjuhtivusvõrrandi

$$(k u_x)_x + F(x, t) = C \rho u_t \quad (10.10)$$

Vaatleme erijuhtusi:

1. Homogeenne varras, k, ρ, C on konstantsed, saame

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (10.11)$$

kus $a^2 = \frac{k}{C\rho}$ ja $f(x, t) = \frac{1}{C\rho} F(x, t)$. Kordajat a^2 nimetatakse ka soojusvahetuskoefitsiendiks. Kui soojusallikad puuduvad, siis $f(x, t) = 0$ ja võrrand saab kuju

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

2. Soojusallikate tihedus võib sõltuda temperatuurist. Kui toimub soojusvahetus ümbritseva keskkonnaga Newtoni seaduse kohaselt, siis soojuskadu ajaühiku jooksul pikkusühiku kohta on

$$F_0 = h(u - \vartheta),$$

kus ϑ on ümbritseva keskkonna temperatuur ja h - soojusvahetuskoefitsient. Sel juhul saame soojusallika tiheduseks

$$F_1(x, t) = F(x, t) - h(u - \vartheta)$$

Kui varras on homogeenne, siis saame võrrandi

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

kus $\alpha = \frac{h}{C\rho}$, $f(x, t) = \alpha\vartheta(x, t) + \frac{F(x, t)}{C\rho}$. Koefitsiendid k ja C on reeglina temperatuurist sõltuvad, aeglaselt muutuvad ajast sõltuvad funktsioonid. Soojusvahetus protsessi pikemas ajavahemikus kirjeldab kvaasilineaarne võrrand

$$(k(u, x) u_x)_x + F(x, t) = C(u, x) \rho(u, x) u_t \quad (10.12)$$

11 Paraboolsed võrrandid. Difusioonivõrrand

Kui mingi ruum on täidetud gaasiga, kusjuures selle tihedus on ebahühtlane, siis toimub gaasi liikumine gaasi kõrgema kontsentratsiooniga osadest madalama kontsentratsiooniga osadesse. Sama toimub ka lahustes.

Vaatleme gaasi (vedeliku) difusiooni torukeses. Eeldame, et igal ajamomendil on gaasi kontsentratsioon kogu ristlõike pinnal ühesugune. Difusiooni saab kirjeldada kontsentratsiooniga $u(x, t)$ ristlõikes x , ajamomendil t . Newtoni seaduse kohaselt liigub läbi ristlõike x ajavahemiku Δt jooksul gaasihulk massiga

$$\Delta m = -D u_x(x, t) S \Delta t = W S \Delta T, \quad (11.1)$$

kus $W = -D u_x$ ja D on difusioonikoefitsient, S ristlõike pindala, $W(x, t)$ difusioonivoo tihedus, mis võrdub ühes ajaühikus gaasi massiga pindalaühiku kohta. Kui tihedus on hühtlane, siis ruumalas V oleva gaasi mass on $m = uV$. Gaasimassi muut toruosas (x_1, x_2) , mis vastab tiheduse muudule Δu , on

$$\Delta m = \int_{x_1}^{x_2} C(x) \Delta u S dx, \quad (11.2)$$

kus $C(x)$ on poorsuse koefitsient. $C(x) =$ pooride ruumala suhe kogu ruumalasse $V_0 = Sdr$. Moodustame masside jaoks tasakaaluvõrrandi lõigul $[x_1, x_2]$ ajavahemikul (t_1, t_2)

$$S \int_{t_1}^{t_2} [D(x_2) u_x(x_2, t) - D(x_1) u_x(x_1, t)] dt = S \int_{x_1}^{x_2} C(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx \quad (11.3)$$

Lõpliku muudu valemi kohaselt

$$\int_{t_1}^{t_2} (D(x)u_x(x, t)) \Big|_{x=\bar{x}} \Delta x dt = \int_{x_1}^{x_2} C(x)u_t(x, \tau)\Delta t dx, \quad (11.4)$$

kus $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ ja $\tau \in (t_1, t_2)$

Kasutades keskväärtusteoreemi ja minnes üle piirväärtusele, kui $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ saame

$$(Du_x)_x = Cu_t, \quad (11.5)$$

mis on difusioonivõrrand (eeldasime, et puuduvad allikad, neelud ja difusiooni ei toimu läbi toru seinte).

Kui difusioonikoefitsient on konstantne, siis saame

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad (11.6)$$

kus $a^2 = \frac{D}{C}$, kui poorsuse koefitsient on 1, siis $a^2 = D$.

Kui vaadelda soojusjuhtivust (difusiooni) 3-me mõõtmelises ruumis, siis saame võrrandi

$$C\rho u_t = \text{div}(k \text{ gradu}) + F, \quad (11.7)$$

kus $\text{div}(k \text{ gradu}) = \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial u}{\partial z})$ Kui keskkond on homogeenne, siis C, ρ ja k on konstandid. Sel juhul

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f, \quad (11.8)$$

kus $a = \frac{k}{C\rho}$, $f = \frac{1}{C\rho}F$.

Teist järku osatuletiste summat nimetatakse Laplace'i operaatoriks ja tähistatakse

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

See võimaldab (11.8) kirjutada kujul

$$u_t = a^2 \Delta u + f$$

12 Elliptilised võrrandid. Protsessid, mida kirjeldab Laplace'i võrrand

Soojusjuhtivusvõrrand omab kuju

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad a^2 = \frac{k}{C\rho}$$

Vaatleme statsionaarset (ajas muutumatut) soojusvahetusprotsessi, sel juhul temperatuur u ei sõltu ajast $u_t = 0$ ja saame

$$\Delta u = 0 \quad \text{Laplace'i võrrand} \quad (12.1)$$

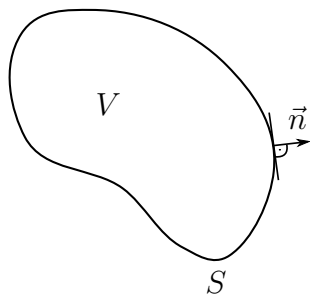
Soojusallikate olemasolu korral saame mittehomogeense võrrandi

$$\Delta u = f, \quad (12.2)$$

kus $f = -\frac{F}{k}$, F - soojusallikate tihedus, k - soojusjuhtivustegur.

Seda mittehomogeenset võrrandit nimetatakse Poissoni võrrandiks.

Vaatleme statsionaarset protsessi ruumilises piirkonnas V , mis on piiratud pinnaga S , siis saame püstitada järgmised rajaülesanded. Leida võrrandi (12.2) lahend, mis



rahuldab rajatingimust

$$\begin{array}{ll} u|_S = g_1 & \text{I liiki rajaülesanne. Dirichlet ülesanne.} \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_S = g_2, & \text{II liiki rajaülesanne. Neumanni ülesanne} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \alpha u \right) \Big|_S = g_3, & \text{III liiki rajaülesanne} \end{array}$$

13 Hüperboolne võrrand. Alg- ja rajatingimused

Vaatleme homogeenise võnkumise võrrandit

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (13.1)$$

Kui keele otsad on punktides $x = 0$ ja $x = l$ kinnitatud, siis peavad olema täidetud rajatingimused

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{I liiki rajatingimused} \quad (13.2)$$

Keele võnkumise protsess sõltub keele algkujust ja punktide algiirustest. Seega tuleb lisada algtingimused.

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x) \\ u_t(x, t_0) = \psi(x) \end{cases} \quad (13.3)$$

Lisatingimused koosnevad raja- ja algtingimustest. Kui keele otsad liiguvad antud seaduspärasusega, siis saame rajatingimused

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \quad (13.2')$$

kus $\mu_1(t)$ ja $\mu_2(t)$ on teada funktsioonid.

Täpselt samamoodi saab püstitada lisatingimustega ülesannet ka varda pikivõnkumiste korral.

Vaatleme varrast, mille üks ots $x = 0$ on kinnitatud ja teine $x = l$ on vaba. Sel juhul $u(0, t) = 0$ ja vabas otsas mõjub elastsusjõud $T(l, t) = ku_x(l, t) = 0$, sest välisjõud puuduvad. Seega

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 \quad (13.4)$$

Kui alguspunkt liigub antud seaduspärasusega $\mu(t)$ ja otspunktile mõjub antud jõud $\bar{v}(t)$, siis saame

$$ku_x(l, t) = -\alpha u(l, t) \quad \text{III liiki rajatingimus} \quad (13.5)$$

või

$$u_x(l, t) = -hu(l, t) \quad h = \frac{\alpha}{k} \quad (13.6)$$

Siin in elastsusjõud vastavalt Hooke'i seadusele võrdeline nihkega u ja püüab viia otspunkti algasendisse. Kui $\alpha \rightarrow \infty$, siis on kinnitus väga jäik ja saame I liiki rajatingimuse $u(l, t) = 0$. Kui aga $\alpha \rightarrow 0$, siis on kinnitus väga lõtv ja piirväärtusena saame vaba otsa tingimuse $u_x(l, t) = 0$.

Võib vaadelda ka mittelineaarset otsa kinnitustingimustega, mis ei vasta Hooke'i seadusele

$$u_x(l, t) = \frac{1}{k}F(u(l, t)) \quad (13.7)$$

Võib vaadelda rajatingimusi, mis sisaldab tuletisi aja suhtes. Kui varda otsale mõjub jõud, mis on võrdeline liikumiskiirusega, siis

$$ku_x(l, t) = -\alpha u_t(l, t) \quad (13.8)$$

Kui varda otsa on kinnitatud raskus massiga m , siis saame rajatingimuses.

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg \quad (13.9)$$

Keele võnkumise korral saame kirjutada sama tüüpi rajatingimusi, asendades k , T_0 -ga.

Hüperboolse mittehomogeense võrrandi I rajaülesanne on järgmine. Leida funktsioon $u(x, t)$, mis rahuldab võrrandit

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (13.10)$$

rajatingimustega

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \quad (13.11)$$

ja algtingimustega

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 < x < l \quad (13.12)$$

Kui rajatingimused on II või III liiki, siis nimetatakse seda ülesannet II või III liiki rajaülesandeks. Kui rajatingimused otstes $x = 0$ ja $x = l$ on erinevat liiki, siis nimetatakse rajatingimusi segaülesandeks.

Kui vaadelda protsessi suhteliselt lühikese aja vältel on otspunktide mõju väga väike ja võib vaadelda ülesannet, milles osalevad vaid algtingimused. Leida võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (13.13)$$

leida lahend, mis rahuldab algtingimusi

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty \quad (13.14)$$

Seda algtingimustega ülesannet nimetatakse Cauchy ülesandeks. Kui meid huvitab protsess, vaid ühe otsa juures teatud ajavahemiku jooksul, siis võib püstitada ülesande poolsirgel $0 < x < +\infty$ lisatingimustega

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t) \quad t > 0 \\ \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(x, l) = \psi(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (13.15)$$

Võib veel vaadelda ülesannet, kus meid huvitab protsess suhteliselt suurte väärtuste korral. Sel juhul algtingimuste mõju tavaliselt väheneb. Näiteks perioodiliselt muutuva rajatingimuste korral. Sel juhul püstitatakse ülesanne ilma algtingimusteta lisades võrrandile vaid rajatingimused.

Kui võrrand ja lisatingimused on lineaarsed (u ja tema tuletised on esimeses astmes, kordajad ei sõltu u -st ega tema tuletistest) siis kehtib superpositsiooni printsiip. Olgu meil $u^{(i)}(x, t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ lineaarse ülesadme lahendit

$$\begin{cases} u_{tt}^{(i)} = a^2 u_{xx}^{(i)} + f_i(x, t) \\ u^{(i)}(0, t) = \mu_1^{(i)}(t), \quad u^{(i)}(l, t) = \mu_2^{(i)}(t) \\ u^{(i)}(x, 0) = \varphi_i(x), \quad u_t^{(i)}(x, 0) = \psi_i(x) \end{cases} \quad (13.16)$$

Siis lahendite summa

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n u^{(i)}(x, t)$$

on järgmise ülesande lahendiks

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (13.17)$$

kus $f(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x, t)$, $\mu_k(t) = \sum_{i=1}^n \mu_k^{(i)}(t)$ kus $k = 1, 2$; $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)$, $\psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x)$ Lahendi $u(x, t)$ võime esitada nelja lihtsama ülesande lahendite summana

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n u^{(i)}(x, t)$$

$$u_{tt}^{(i)} = a^2 u_{xx}^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad u_{tt}^{(i)} = a^2 u_{xx}^{(i)} + f(x, t)$$

$$\begin{cases} u^{(1)}(0, t) = 0 & u^{(2)}(0, t) = \mu_1(t) & u^{(3)}(0, t) = 0 & u^{(4)}(0, t) = 0 \\ u^{(1)}(l, t) = 0 & u^{(2)}(l, t) = 0 & u^{(3)}(l, t) = \mu_2(t) & u^{(4)}(l, t) = 0 \\ u^{(1)}(x, 0) = \varphi(x) & u^{(2)}(x, 0) = 0 & u^{(3)}(x, 0) = 0 & u^{(4)}(x, 0) = 0 \\ u_t^{(1)}(x, 0) = \psi(x) & u_t^{(2)}(x, 0) = 0 & u_t^{(3)}(x, 0) = 0 & u_t^{(4)}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (13.18)$$

Teoreem 13.1. *Lahendi olemasolu ja ühesus:*

Võrrandil $\rho(x)u_{tt} = (k(x)u_x)_x + F(x, t)$ $\rho(x) > 0$ $k(x) > 0$ $0 < x < l$, $t > 0$ koos alg ja rajatingimustega

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) & \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = \mu_1(t) & \quad u(l, t) = \mu_2(t) \end{aligned}$$

saab olla vaid üks lahend piirkonnas $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, kui on täidetud tingimused

1. $u(x, t)$ ja selle teist järku osatuletised on pidevad vaadeldavas piirkonnas
2. $\rho(x)$ ja $k(x)$ on pidevad lõigul $[0, l]$.

14 Lainete meetod. d'Alembert'i lahend

Vaatame lainevõrrandi Cauchy ülesannet (lõpmata pika keele võnkumine).

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad (14.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (14.2)$$

Teisendame võrrandi kanoonilisele kujule. Karakteristiline võrrand on

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \quad (14.3)$$

ehk

$$(dx - a dt)(dx + a dt) = 0$$

seega

$$(dx - a dt) = 0 \quad \text{või} \quad (dx + a dt) = 0$$

lahenditeks on sirged

$$x - at = C_1 \quad \text{või} \quad x + at = C_2 \quad (14.4)$$

Teeme muutujate vahetuse

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \quad (14.5)$$

ja saame kanoonilise kuju

$$u_{\xi\eta} = 0 \quad (14.6)$$

Leiame selle võrrandi üldlahendi

$$\int u_{\xi\eta} d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\eta}(\xi, \eta) - g(\eta) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\eta}(\xi, \eta) = g(\eta)$$

$$u(\xi, \eta) = \int g(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

Järelikult on (14.1) üldlahendiks

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (14.7)$$

Leiame f_1 ja f_2 . Üldlahend rahuldab algtingimusi

$$\begin{cases} u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \end{cases} \quad (14.8)$$

Integreerides teist võrdust saame

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + C$$

kus x_0 ja C on konstandid. Liites ja lahutades (14.8) esimest võrdust saadud võrdusega, saame

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + C \right] \\ f_2(x) = \frac{1}{2} \left[\varphi(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + C \right] \end{cases} \quad (14.9)$$

asendades leitud funktsioonid lahendisse (14.7), saame

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \left[\int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right]$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (14.10)$$

Viimast (14.10) nimetatakse d'Alembert' lahendi valemiks. Saadud valemist järeldub lahendi olemasolu ja ühesus. sama ülesande kahe erineva lahendi vahe $u(x, t) - v(x, t) = W(x, t)$ algtingimused on võrdsed nulliga

$$W(x, 0) = 0, \quad W_t(x, 0) = 0$$

d'Alembert'i valemist järeldub seega

$$W(x, t) \equiv 0 \quad \text{ja} \quad u(x, t) = v(x, t)$$

Kui $\psi(x)$ on üks kord ja $\varphi(x)$ kaks korda diferentseeruvad, siis eksisteerivad osatuletised u_{xx} ja u_{tt} ning $u(x, t)$ on võrrandi (14.1) lahend.

15 d'Alembert'i lahendi geomeetriline tõlgendus

d'Alembert'i lahend kirjeldab algnihke ja algkiiruse levimist. Nihkefunktsioon $u(x, t_0)$ kirjeldab keele kuju momendil t_0 . Oletame, et mingi vaatleja asub punktis $x = 0$ hetkel $t = 0$ ja liigub kiirusega a x -kasvamise suunas. Selle vaatlejaga on seotud koordinaatsüsteem $\bar{x} = x - at$, $\bar{t} = t$. Selles koordinaadistikus saab funktsioon $u(x, t) = f(x - at)$ kuju $u = f(\bar{x})$ ja jääb vaatleja jaoks muutumatuks. Seega $u(x, t) = f(x - at)$ on laineprofil, mis liigub muutumatult paremale kiirusega a . Analoogselt kujutab funktsioon $u = f(x + at)$ lainet, mis liigub vasakule kiirusega a . Seega lõpmata keele lahend on kahe laine summa

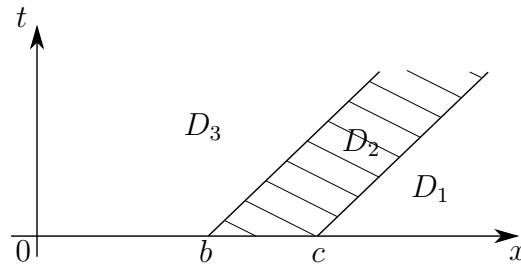
$$f_1(x + at) + f_2(x - at)$$

kus

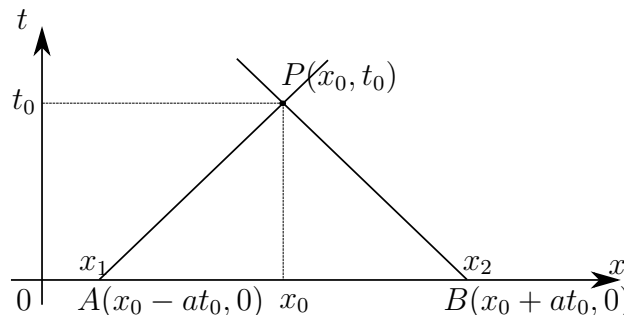
$$\begin{aligned} f_1(x + at) &= \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \Psi(x + at) \\ f_2(x - at) &= \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \Psi(x - at) \\ \Psi(x) &= \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Lahendi iseloomu kujutamiseks on mugav kasutada faasiruumi (tasandit) (x, t) . Sirged $x - at = \text{const}$ ja $x + at = \text{const}$ on karakteristikud. Funktsioonid $f_1(x + at)$ ja $f_2(x - at)$ on konstantsed karakteristikud.

Olgu $f(x)$ nullist erinev vaid lõigul $[b, c]$. Joonestame karakteristikud $x - at = b$ ja $x - at = c$ läbi lõigu otspunktide. Funktsioon $f(x - at)$ on nullist erinev vaid piirkonnas D_2 .



Otspunktidest väljuvad karakteristikud on paremale liikuva laine frontideks. Vaatleme ühte fikseeritud punkti $P(x_0, t_0)$ ja tõmbame läbi selle punkti karakteristikud $x - at = x_0 - at_0$ ja $x + at = x_0 + at_0$. Funktsiooni $u = f_1(x - at) + f_2(x + at)$ väärtus punktis



$P(x_0, t_0)$ on $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$

$$x_1 = x_0 - at_0, \quad x_2 = x_0 + at_0$$

Seega selle väärtuse määravad funktsioonide $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ väärtused punktis A ja B . Kolmnurka ABP nim. punkti $P(x_0, t_0)$ karakteristikuliseks kolmnurgaks.

d'Alembert'i valem näitab, et nihe $u(x_0, t_0)$ punktis P sõltub vaid algnihetest, punktidest A ja B ning algiirusest lõigul AB . Lahendivalemi saame esitada kujul

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}(\varphi|_A + \varphi|_B) + \frac{1}{2a} \int_{(A)}^{(B)} \psi(\xi) d\xi \quad (15.1)$$

Algandmed väljaspool lõiku AB ei avalda mõju lahendile $u(x, t)$ punktis P . Kui algandmed on antud vaid lõigul $[b, c]$, siis määravad nad üheselt lahendi $u(x, t)$ karakteristikulises kolmnurgas, mille aluseks on lõik $[b, c]$.

Esitame lahendivalemi kujul

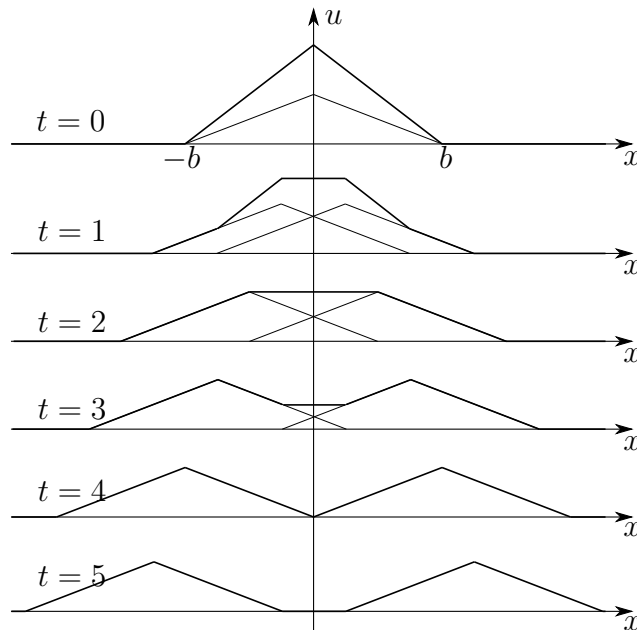
$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] \quad (15.2)$$

$$u_2(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \quad (15.3)$$

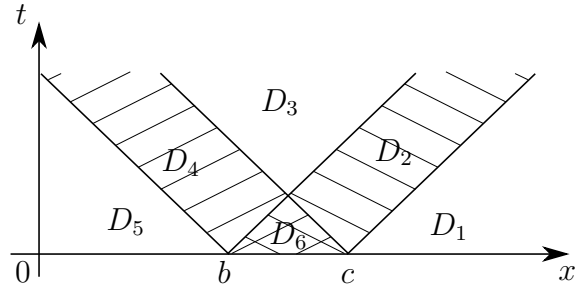
Kui algkiirus on null $\psi(x) = 0$, siis nihe $u_1(x, t)$ on kahe laine summa, mille algkuju on võrdne $\frac{1}{2}\varphi(x)$, pool algnihkest. Kui algnihe on null, $\varphi(x) = 0$, siis nihe $u_2(x, t)$ on põhjustatud vaid algkiirusest.

Näide 1

Vaatleme algnihke levikut, kui algkiirus on null ja algnihe on võrdhaarse kolmnurga kujuline ajamomentidel vahega $\Delta t = \frac{b}{4a}$, ehk $t_i = i\Delta t = \frac{b}{4a}i \quad i = 0, 1, \dots$



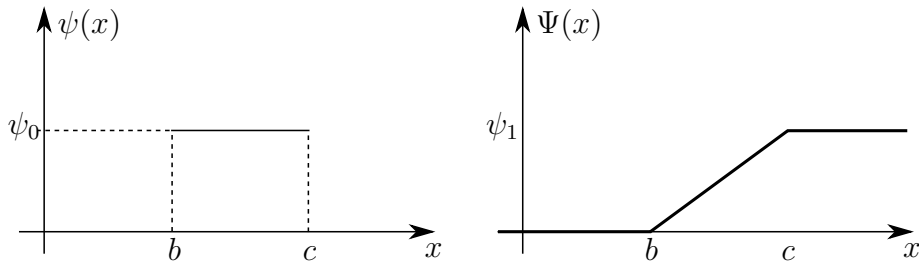
Tõmbame karakteristikud läbi lõigu $[b, c]$ otspunktide. Piirkondades D_1, D_3, D_5 on nihe $u(x, t)$ null, sest nende piirkondade punktide karakteristikulistel kolmnurkadel pole tippu, mis asetsevad lõigul $[b, c]$. Piirkonnas D_2 on lahendiks paremale liikuv laine $u = \frac{1}{2}\varphi(x - at)$ ja piirkonnas D_4 on lahendiks vasakule liikuv laine $u = \frac{1}{2}\varphi(x + at)$. Piirkonnas D_6 on nihe võrdne kahe laine summaga $u = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)]$.



Näide 2

Algnihe $\varphi(x) = 0$ ja algkiirus $\psi(x)$ on nullist erinev vaid lõigul $[b, c]$ ning seejuures $\psi(x) = \psi_0$. Lahendiks on funktsioon $u = u_\psi(x, t)$. Leiame funktsiooni $\Psi(x)$ võttes $x_0 = 0$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & x < b \\ \frac{1}{2a}(x-b)\psi_0 & b < x < c \\ \frac{1}{2a}(c-b)\psi_0 & x > c \end{cases}$$

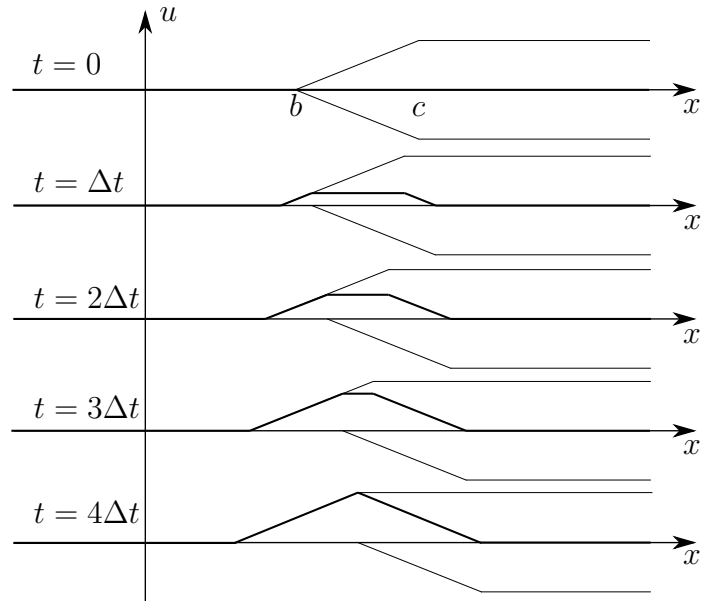


$$u_\psi(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at)$$

Lahendiks on vasakpoolse ja parempoolse laine vahe. Ajasammuks võtame $\Delta t = \frac{c-b}{8a}$

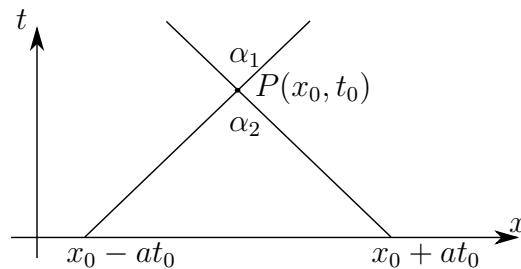
Faasitasandi pilt on samasugune nagu Näide 1 korral. Piirkonnas

$$\begin{aligned} D_1, D_5 : \quad & \Psi(x - at) = \Psi(x + at) \quad u(x, t) = 0 \\ D_3 : \quad & \Psi(x + at) = \frac{c-b}{2a}\psi_0 \quad u(x, t) = \frac{c-b}{2a}\psi_0 \\ & \Psi(x - at) = 0 \\ D_2 : \quad & \Psi(x + at) = \frac{c-b}{2a}\psi_0 \quad u(x, t) = \frac{c-(x-at)}{2a}\psi_0 \\ & \Psi(x - at) = \frac{x-at-b}{2a}\psi_0 \\ D_4 : \quad & \Psi(x + at) = \frac{x+at-b}{2a}\psi_0 \quad u(x, t) = \frac{x+at-b}{2a}\psi_0 \\ & \Psi(x - at) = 0 \\ D_6 : \quad & \Psi(x + at) = \frac{x+at-b}{2a}\psi_0 \quad u(x, t) = \psi_0 t \\ & \Psi(x - at) = \frac{x-at-b}{2a}\psi_0 \end{aligned}$$



Näide 3

Vaatleme keele võnkumist jõuimpulsi mõjul. Algmomendil anname keelele löigul $[b, c]$ pikkusega Δx konstantse algkiiruse ψ_0 . Sel juhul antakse sellele keele osale impulss I , mis on võrdne liikumishulga muuduga. $I = \rho \Delta x \psi_0$, kus ρ on keele tihedus. Seega peame lahendama ülesande nullilise algnihke $\rho = 0$ ja algkiirusega $\psi = \frac{I}{\rho \Delta x} = \frac{I_0}{\rho} = \psi_0$, löigul $[b, c]$ ja $\psi = 0$ väljaspool antud löiku. $I_0 = \frac{I}{\Delta x}$ on impulsi tihedus. Jõuimpulsi poolt antud nihe kujutab endast ajamomendil $\frac{\Delta x}{2a}$ trapetsit alustega $2at + \Delta x$ ja $2at - \Delta x$. Minnes üle piirväärtusele, kui $\Delta x \rightarrow 0$ $I_0 = \text{const}$, saame, et nihked on nullilised väljaspool vahemikku $(x - at, x + at)$ ja nihe võrdub $\frac{I_0}{2a\rho}$ selles vahemikus. Seega võib väita, et selliseid nihkeid võib tekitada punktipulss. Tõmmates läbi punkti $P(x_0, t_0)$



karakteristikud $x - at = x_0 - at_0$ ja $x + at = x_0 + at_0$ tekivad punkti P juures nurgad α_1 ülemine karakteristiline nurk ja α_2 alumine karakteristiline nurk. Punktipulsi I_0 mõjus punktis $P(x_0, t_0)$ tekib nihe ülemises karakteristilises nurgas ja nihe on null väljaspool seda nurka.

16 Mittehomogeense võrrandi lahend

Vaatleme mittehomogeense võrrandi Cauchy ülesannet

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (16.1)$$

Olgu $w_f(x, t, \tau)$ abistava homogeense ülesande lahend

$$\begin{cases} (w_f)_{tt} = a^2 (w_f)_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > \tau \\ w_f(x, \tau, \tau) = 0, & \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, \tau, \tau) = g(x, \tau) \end{cases} \quad (16.2)$$

Vastavalt d'Alembert'i valemile saame

$$w_f(x, t, \tau) = w_f(x, t - \tau, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi, \tau) d\xi \quad (16.3)$$

Homogeense võrrandi d'Alembert'i lahendi

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

saab ümber kirjutada kujul

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t, 0) + w_\psi(x, t, 0) \quad (16.4)$$

kus $w_\varphi(x, t, 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$; $w_\psi(x, t, 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$ on ülesande (16.2) lahendid, kui $\tau = 0$ ja $g(x, 0) = \varphi(x)$ või $g(x, 0) = \psi(x)$

Tõepoolest

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t, 0) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \right] \stackrel{I}{=} \frac{1}{2a} \varphi(x + at) a - \frac{1}{2a} \varphi(x - at) (-a) \\ &= \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] \end{aligned}$$

^Ikasutame seost $\frac{d}{dt} \left[\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right] = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt + f(b, t)b'(t) - f(a, t)a'(t)$

Lemma 16.1. Nulliliste algtingimustega ($u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$) mittehomogeense ülesande (16.1) lahendiks on

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t w_f(x, t, \tau) d\tau, \quad (16.5)$$

kus $w(x, t, \tau)$ on ülesande (16.2) lahend, kui $g(x, t) = \frac{1}{a^2} f(x, t)$

Tõestus.

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 \overbrace{w_f(x, t, \tau)}^{(16.2)=0} + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau \\ u_{tt} &= a^2 \overbrace{\frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t, \tau)}^{(16.2)=g(x,t)} + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau + f(x, t) \\ u_{xx} &= a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x, t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau \end{aligned}$$

seega

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

□

Järelikult saame mittehomogeense võrrandi (16.1) lahendi esitada kasutades (16.4) ja (16.5) homogeense ja nullilise mittehomogeense ülesande kaudu kujul

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t, 0) + w_\psi(x, t, 0) + a^2 \int_0^t w(x, t, \tau) d\tau$$

kasutades lahendi w avaldise saame

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (16.6)$$

17 Lahendi stabiilsus

Näitame, et homogeense võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

lahend sõltub pidevalt algtingimustest $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$. Olgu meil kaks lahendit

$$(u_k)_{tt} = a^2(u_k)_{xx}$$

$$u_k(x, 0) = \varphi_k(x), \quad (u_k)_t(x, 0) = \psi_k(x), \quad k = 1, 2$$

Lemma 17.1. *Pidev sõltuvus algtingimustest (lahendi stabiilsus):*

$\forall [0, t_0] \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, et kui $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$ ja

$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$, siis $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq t_0$

Tõestus. Tõestus järgneb d'Alembert'i valemist

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{1}{2}|\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \frac{1}{2}|\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| +$$

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at = (1+t)\delta \stackrel{t \leq t_0}{\leq} (1+t_0)\delta < \varepsilon,$$

kui $\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$,

□

Definitsioon 17.1. *Matemaatilise füüsika ülesanne on korrektne, kui*

1. lahend eksisteerib vaadeldavas piirkonnas
2. lahend on ühene vaadeldavas piirkonnas
3. lahend sõltub pidevalt lähteandmetest (stabiilsus)

Praktilistes rakendustes tuleb sageli ette ka mittekorrektseid ülesandeid.

Näiteks Hadamard'i näide

Cauchy ülesanne Laplace'i võrrandile

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x)$$

Vaatleme kahte lahendit $u^{(1)}(x, y) \equiv 0$ ($\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$) ja $u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) \operatorname{ch}(\lambda y)$

$$(u^{(2)})_{xx} = -\lambda \sin \lambda x \operatorname{ch} \lambda y \quad (u^{(2)})_{yy} = \lambda \sin \lambda x \operatorname{ch} \lambda y$$

Algtingimuste erinevus $|u^{(1)}(x, 0) - u^{(2)}(x, 0)| = \left| \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \right| \leq \frac{1}{\lambda}$ muutub λ kasvades kuitahes väikeseks.

Samal ajal $u^{(2)}(x, y)$ väärtused võivad λ kasvades muutuda kuitahes suureks fikseeritud y korral

$$\operatorname{ch} \lambda y = \frac{1}{2} (e^{\lambda y} + e^{-\lambda y})$$

$$|\operatorname{ch} \lambda y| \leq \frac{1}{2} e^{\lambda y} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \infty$$

18 Ülesanne poolsirgel. Jätkamise meetod

Vaatleme ülesannet

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \mu(t) \quad (\text{või } u_x(0, t) = \nu(t)) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x < +\infty \end{cases} \quad (18.1)$$

Lemma 18.1. *Kui kogu sirge ülesandes on algandmed paaritud funktsioonid mingi punkti x_0 suhtes, siis on lahend võrdne nulliga selles punktis. Kui algandmed on paarisfunktsioonid x_0 suhtes, siis on lahendi tuletis x -järgi u_x selles punktis null.*

Tõestus. Võtame lihtsuse mõttes $x_0 = 0$. Kui algandmed on paaritud funktsioonid, siis

$$\varphi(x) = -\varphi(x) \quad \text{ja} \quad \psi(x) = -\psi(x)$$

d'Alembert'i valemist saame

$$u(0, t) = \frac{1}{2} [\varphi(at) + \varphi(-at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = 0$$

sest paaritu funktsiooni integraal sümmeetrilistes rajades on null. Analoogselt paarisfunktsioonide korral

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \quad \psi(x) = \psi(-x)$$

Diferentseerides d'Alembert'i valemit leiame

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2}[\varphi'(at) + \varphi'(-at)] + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] = 0$$

sest $\varphi'(at) = -\varphi'(-at)$

□

Lemma abil saame lahendada ülesande

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 < x < +\infty \end{cases} \quad (18.2)$$

Defineerime paaritud funktsioonid

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Siis on võrrandi lahendiks

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi \quad (18.3)$$

Vastavalt lemmale $u(0, t) = 0$. Sammuti rahuldab $u(x, t)$ algtingimusi (18.2). Asendades esialgsete funktsioonide kaudu, saame

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & \text{kui } t < \frac{x}{a}, x > 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & \text{kui } t > \frac{x}{a}, x > 0 \end{cases} \quad (18.4)$$

Kui $t < \frac{x}{a}$, siis rajatingimuse mõju ei ole punktis x ja lahend langeb kokku lõpmatu sirge lahendiga.

Vaatleme nüüd rajatingimusi $u_x(0, t) = 0$ ja jätkame algtingimusi paarisfunktsiooniga

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ \psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & t < \frac{x}{a}, x > 0 \\ \frac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right], & t > \frac{x}{a}, x > 0 \end{cases} \quad (18.5)$$

Näide 1

Vaatleme geomeetriliselt lahendit, kui $x = 0$ ots on kinnitatud ja algnihe on nullist erinev vaid lõigul $[b, c]$ $\varphi(x)$ graafik omab võrdhaarse kolmnurga kuju, ning $\psi(x) \equiv 0$. Alguses toimub protsess nii nagu lõpmatu sirge korral, kuni vasakule liikuv laine jõuab nullpunktini. Sel hetkel tuleb vasakult, kus toimub samasugune protsess, paremale liikuv vastandmärgiga laine. Seeläbi hakkab vasakpoolne laine peegelduma kinnitatud otsa juurest. Võtame ajamomendi vahega $\Delta t = \frac{c-b}{8a}$.

Laine peegeldumisel kinnisest otsast muudab nihe märki.

Näide 2

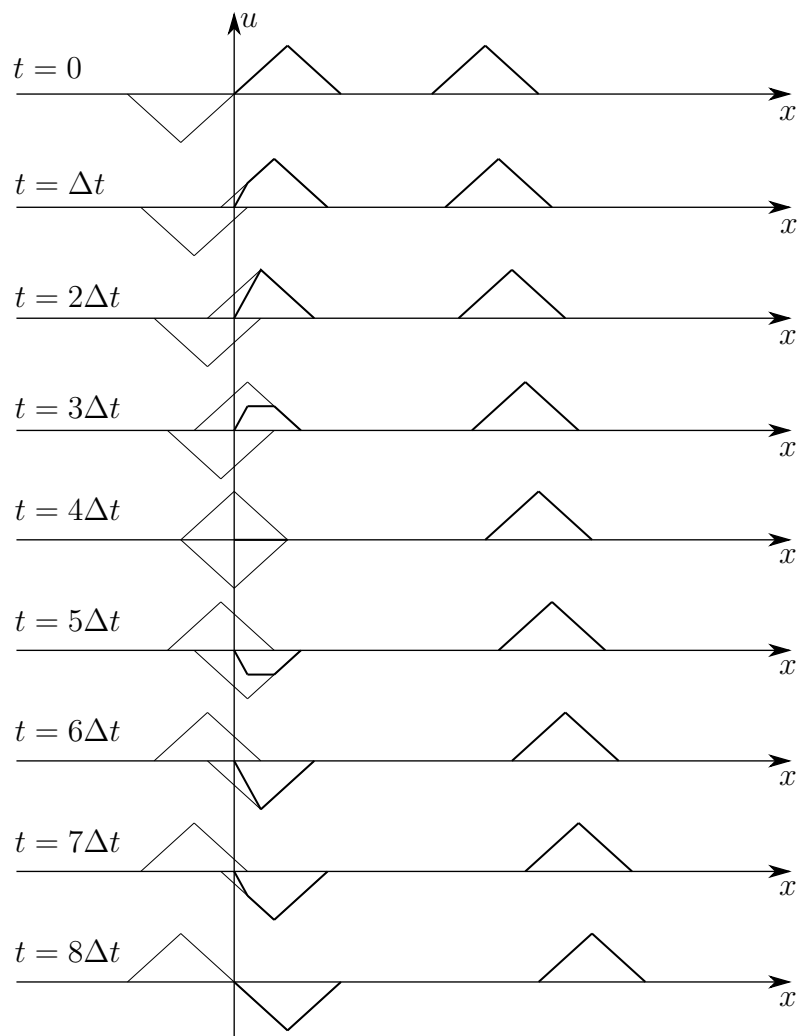
Vaatleme kinnitatud otsaga keele võnkumist, kui algnihked on nullid $\varphi(x) = 0$ ja algiirus on nullist erinev vaid lõigul $[b, c]$, kus $\psi(x) = \text{const}$. Jätkame algtingimusi paarisfunktsioonidena, siis on lõikudel $[b, c]$ ja $[-c, -b]$ algul trapetsikujulised lained, nagu lõpmatu keele korral. Laine peegeldab kinnitatud otsast ja liigub paremale võrdhaarse trapetsi kujuliselt. Lahtise otsa korral $u(0, t) = 0$ tuleb algtingimusi jätkata paarisfunktsioonidena ja laine peegeldab lahtisest otsast nii, et nihke märk ei muutu.

Mittehomogeensete rajatingimuste korral võib lahendi esitada

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \text{või} \quad u_x(0, t) = \nu$$

mitme lahendi summana, kus igal lahendil on vaid üks tingimustest nullist erinev. Vaatleme lahendit, mis vastab nulliliste algtingimustele, kui nullist erinevale rajatingimusele

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) &= \mu(t), & t &> 0 \end{aligned}$$



Rajatingimus tekitab laine, mis liigub (mööda keelt) paremale kiirusega a , seega

$$u(x, t) = f(x - at)$$

Funktsiooni f leiame rajatingimustest

$$u(0, t) = f(-at) = \mu(t)$$

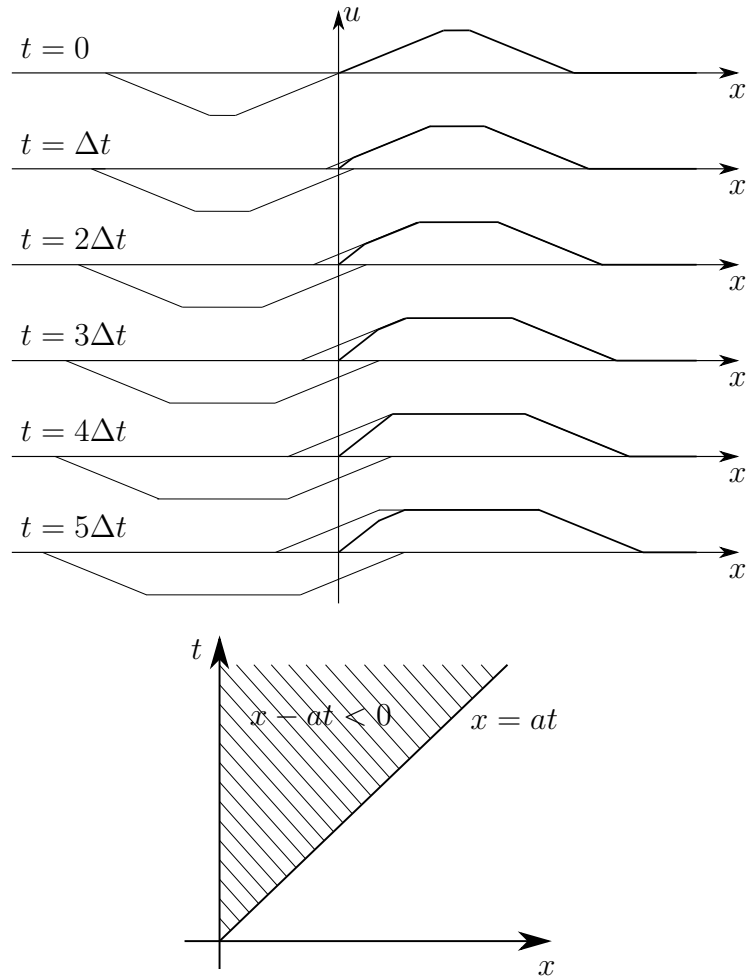
siit

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right)$$

ja

$$u(x, t) = \mu\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

See funktsioon on määratud vaid piirkonnas $x - at \leq 0$, sest $\mu(t)$ eksisteerib vaid $t < 0$ korral. Et leida $u(x, t)$ kõigi argumentide väärtuste korral, jätkame funktsiooni $\mu(t) = 0$,



kui $t < 0$. Sel juhul

$$u(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (18.6)$$

määratud kõigi argumentide väärtuste korral ja nullilisi algväärtusi. Liites saadud lahendi eespool saadud I rajaülesande lahendiga (18.5), saame homogeense võrrandi I rajaülesande lahendi

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & t < \frac{x}{a} \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & t > \frac{x}{a} \end{cases} \quad (18.7)$$

Analoogselt saab leida ka II rajaülesande lahendi.

19 Rajaülesanded lõplikul lõigul

Vaatleme võrrandit

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

koos rajatingimustega

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0$$

ning algtingimustega

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

Alustame homogeenet algtingimusest

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

Otsime lahendit jätkamise meetodil, eeldades, et lahendi saab esitada kujul

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi \quad (19.1)$$

kus $\Phi(x)$ ja $\Psi(x)$ on otsitavad funktsioonid

Algtingimused määravad Φ ja Ψ lõigul $[0, l]$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \Phi(x) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l$$

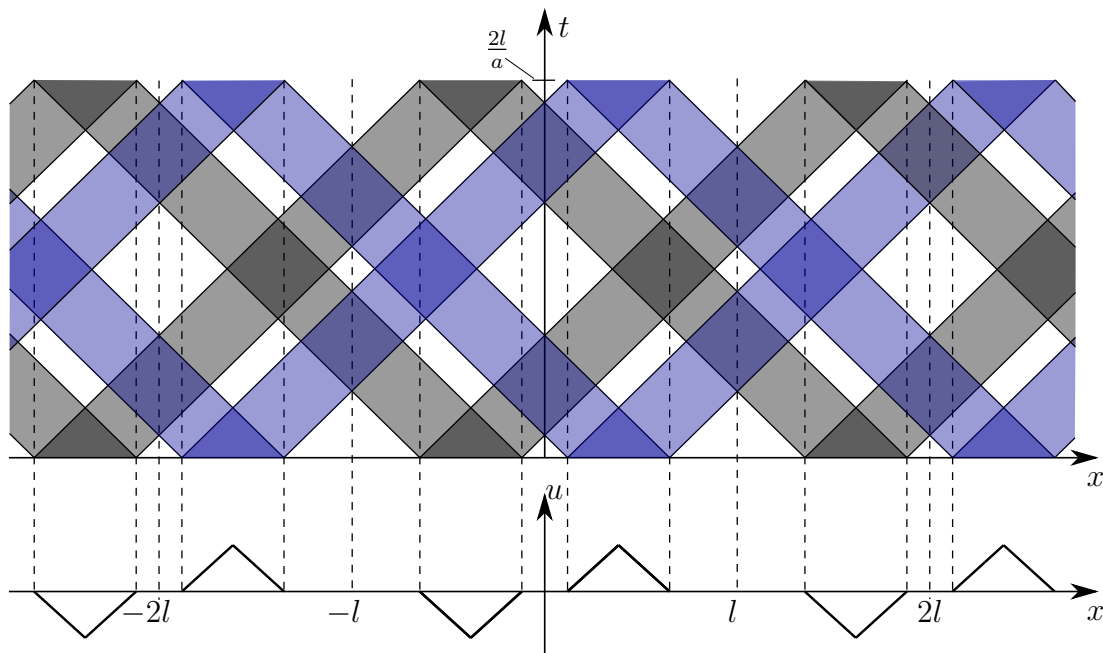
Nulliliste rajatingimuste korral jätkame neid funktsioone paaritute funktsioonide punktides $x = 0$ ja $x = l$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= -\Phi(-x), & \Phi(x) &= -\Phi(2l - x) \\ \Psi(x) &= -\Psi(-x), & \Psi(x) &= -\Psi(2l - x) \end{aligned}$$

Nendest võrdustest järeldub, et

$$\Phi(x) = \Phi(x + 2l), \quad \Psi(x) = \Psi(x + 2l)$$

seega on nad perioodilised, perioodiga $2l$. Perioodilisus võimaldab neid jätkata kogu x -teljele. Asendades funktsioonid d'Alembart'i valemisse saamegi otsitava lahendi.



Vaatleme lahendit geomeetriliselt algmomendil ja faasitasandil. viirutatud ristteedel on lahend nullist erinev. Lahend kordub perioodiliselt. Pilt kordub ajahetkel $t = \frac{2l}{a}$. Seega $u(x, t)$ on perioodiline, omades perioodi $T = \frac{2l}{a}$.

Vaatleme rajatingimuste mõju levimist ajajoonel. Olgu rajatingimused

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0$$

ja algtingimused nullilised. Eelmise punkti tulemustest järeldeb, et kui $t < \frac{l}{a}$, siis on lahendiks

$$u(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \text{kus} \quad \mu(t) = \begin{cases} \mu(t) & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Kuid see funktsioon ei sisalda rajatingimust

$$u(l, t) = 0, \quad \text{kui} \quad t > \frac{l}{a}$$

Vaatleme peegeldunud lainet, mis liigub vasakule ja mille nihe punktis $x = l$ on $\mu\left(t - \frac{l}{a}\right)$. Selle laine avaldiseks on

$$\mu\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

Seega lainete vahe

$$\mu\left(t - \frac{x}{a}\right) - \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

on lahendiks, kui $t < \frac{2l}{a}$.

Jätkates seda protsessi saame lahendi kujul

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu \left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \mu \left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a} \right) \quad (19.2)$$

Iga lõpliku t korral on selles summas vaid lõplik arv liidetavaid n kasvades μ argument väheneb $\frac{2l}{a}$ võrra, kui $\mu(t) = 0$, kui $t < 0$. Rajatingimusi saab kontrollida vahetult.

Analoogselt saab näidata, et kui rajatingimused on $u(x, 0) = 0$ ja $u(l, t) = \mu(t)$, ning algtingimused on nullid, siis saame lahendi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \mu \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a} \right) \quad (19.3)$$

20 Muutujate eraldamise meetod ehk Fourier' meetod

Lahendame keele võnkumise võrrandi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (20.1)$$

rajatingimustega

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (20.2)$$

ja algtingimustega

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (20.3)$$

Püstitame abiülesande: leida võrrandi (20.1) lahend nulliliste rajatingimustega (20.2), mida saab esitada korrutisena

$$u(x, t) = p(x) \cdot q(t) \quad (20.4)$$

Asendades võrrandisse (20.1) saame

$$p''(x) q(t) = \frac{1}{a^2} p(x) q''(t)$$

ehk

$$\frac{p''(x)}{p(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{q''(t)}{q(t)} \quad (20.5)$$

Selleks, et $u(x, t)$ oleks võrrandi lahendiks, peab võrdus (20.5) olema täidetud samaselt kõigi $0 < x < l$, $t > 0$ korral. Fikseerime x väärtuse ja muutes t -d, või vastupidi, näeme, et vasak ja parem pool on konstantsed. Olgu

$$\frac{p''(x)}{p(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{q''(t)}{q(t)} = -\lambda \quad \lambda = \text{const} \quad (20.6)$$

Saame kaks tavalist diferentsiaalvõrrandit

$$p''(x) + \lambda p(x) = 0, \quad p(x) \not\equiv 0 \quad (20.7)$$

$$q''(t) + a^2 \lambda q(t) = 0, \quad q(t) \not\equiv 0 \quad (20.8)$$

Rajatingimustest saame

$$u(0, t) = p(0) \cdot q(t) = 0 \quad (20.9)$$

$$u(l, t) = p(l) \cdot q(t) = 0$$

Seega $p(0) = p(l) = 0$. Funktsioonil $q(t)$ täiendavaid tingimusi pole.

Saime **omaväärtuste ülesande**: leida niisugused parameetri λ väärtused, mille korral ülesandel

$$\begin{cases} p''(x) + \lambda p(x) = 0 \\ p(0) = p(l) = 0 \end{cases} \quad (20.10)$$

on nullist erinevad (mittetriviaalsed) lahendid. Selliseid λ väärtusi nimetatakse **omaväärtusteks** ja vastavaid funktsioone **omafunktsioonideks**. Seda ülesannet nimetatakse sageli **Sturm-Liouville'i ülesandeks**.

Vaatleme erinevate λ väärtuste juhtumeid

1. Kui $\lambda < 0$, siis ülesandel (20.10) puuduvad mittetriviaalseid lahendid. Tõepoolest karakteristlik võrrand on

$$k^2 + \lambda = 0 \quad \implies k^2 = -\lambda$$

$$k_1 = -\sqrt{-\lambda}, \quad k_2 = \sqrt{-\lambda}$$

millest üldlahend on

$$p(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

rajatingimustest

$$p(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$p(l) = C_1 e^{-\alpha} + C_2 e^{\alpha} = 0, \quad \alpha = l\sqrt{-\lambda}$$

seega

$$C_1 = -C_2 \quad \text{ja} \quad C_1(e^{-\alpha} + e^{\alpha}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

2. Kui $\lambda = 0$, siis karakteristiklik võrrand on $k^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$, millest üldlahend

$$p(x) \stackrel{\text{I}}{=} C_1 e^{0 \cdot x} + x C_2 e^{0 \cdot x} = C_1 + x C_2$$

rajatingimustest

$$p(0) = C_1 = 0$$

$$p(l) = C_1 + C_2 l = C_2 l = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

3. Kui $\lambda > 0$, siis karakteristiklik võrrand on

$$k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda$$

$$k_1 = -\sqrt{\lambda}i, \quad k_2 = \sqrt{\lambda}i$$

millest üldlahend on

$$p(x) \stackrel{\text{II}}{=} C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

rajatingimustest

$$p(0) = C_1 = 0$$

$$p(l) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot l) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot l) = 0$$

Et $p(x) \not\equiv 0$, siis $C_2 \neq 0$, siit saame

$$\sin(\sqrt{\lambda} \cdot l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot l = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \quad \text{kus} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Järelikult saame omaväärtusteks

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tag{20.11}$$

neile omaväärtustele vastavad omafunktsioonid

$$p_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \text{kus } C_n \text{ on mingi konstant} \tag{20.12}$$

Omaväärtustele λ_n vastavad võrrandi (20.8) lahendid

$$q_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{l}at + B_n \sin \frac{n\pi}{l}at \tag{20.13}$$

^I x - tuleb $C_2 e^{0 \cdot x}$ ette, kuna peab olema linearselt sõltumatu $C_1 e^{0 \cdot x}$ -est

^{II}Kaaskomplekslahendite paarile $\alpha + i\beta$ vastab erilahend $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$

kus A_n, B_n on konstandid.

Eisialgse ülesande (20.1)-(20.3) erilahendiks, mis rahuldab rajatingimusi ja omab kor-
rutise kuju on

$$u_n(x, t) = p_n(x) q_n(t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (20.14)$$

Need erilahendid rahuldava algtingimusi (20.3) vaid eriliste $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ korral.

Et võrrand (20.1) on lineaarne ja homogeenne, siis selle erilahendite summa on samuti selle võrrandi lahendiks. Vaatleme (summat) rida

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (20.15)$$

Algtingimused saame

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{cases} \quad (20.16)$$

Fourier' read

Tükati pideva ja diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ perioodiga $2l$ saab esitada Fourier'
reana

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Jätkame funktsioone $\varphi(x)$ ja $\psi(x)$ paaritult, siis nad on perioodilised perioodiga $2l$ ja kordajad $a_0, a_n, n = 1, 2, \dots$ on nullid.

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, & \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, & \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{cases} \quad (20.17)$$

Ridade kordajate võrdlemine annab

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{1}{n\pi a} \psi_n \quad (20.18)$$

Funktsioon (20.15) on seega ülesande (20.1)-(20.3) lahendiks.

21 Lahendi analüüs

Teisendame lahendit (20.15). Tähistame

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

siis leidub selline δ_n , et

$$\frac{A_n}{\alpha_n} = \cos \frac{n\pi a}{l} \delta_n \quad \frac{B_n}{\alpha_n} = -\sin \frac{n\pi a}{l} \delta_n$$

kus

$$-\frac{B_n}{A_n} = \tan \frac{n\pi a}{l} \delta_n$$

saame

$$u_n(x, t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi a}{l} (t + \delta_n^I) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (21.1)$$

Seega keele iga punkt x_0 teostab harmoonilisi võnkeid $u_n(x_0, t)$ amplituudiga

$$\alpha_n \sin \frac{n\pi x_0}{l}$$

Selliseid keele võnkumisi nimetatakse **seisvateks laineteks**. Punkte $x = \frac{m}{n}l$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$) nimetatakse **seisulainete sõlmedeks**. Punktides $x = \frac{2m+1}{2n}l$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), kus $\sin \frac{n\pi x}{l} = \pm 1$ on võnkumine maksimaalse amplituudiga (**paisupunktid**).

Seisulaine kuju igal ajamomendil on sinusoid

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

kus $C_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n(t + \delta_n)$, $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$. Kõik punktid võnguvad sama sagedusega

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l} \quad (21.2)$$

mida nimetatakse omavõnkesageduseks. Keele ristvõnkumise korral $a^2 = \frac{T}{\rho}$, seega

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (21.3)$$

^I δ_n on faasinihe

n-nda seisevlaine (harmooniku) energia keele võnkumisel on

$$\begin{aligned}
 E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\
 &= \frac{\alpha_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) \sin^2 \frac{n\pi x}{l} + T \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \right] dx \\
 &= \frac{\alpha_n^2 l}{4} \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n(t + \delta_n) + T \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n(t + \delta_n) \right],
 \end{aligned}$$

sest $\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$.^{II} Kasutades seoseid $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, $\frac{n\pi}{l} = \sqrt{\frac{\rho}{T}} \omega_n$, leiame

$$T \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 = T \frac{\rho}{T} \omega_n^2 = \rho \omega_n^2$$

Järelikult

$$E_n = \frac{\rho \omega_n^2 \alpha_n^2}{4} = \omega_n^2 M \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \quad (21.4)$$

kus $M = l\rho$ on keele mass.

Keele võnkumisel tekib heli, mille kõrgus on määratud võnkesagedusega ja tugevus võnkeamplituudiga. Madalaim toon, mida keel saab teha on määratud madalaima omavõnkesagedusega

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Seda nimetatakse keele põhitooniks. Ülejäänud toone, mille sagedus on ω_1 kordsed, nimetatakse ülemtoonideks (oobertonideks). Ülemtoonid määravad heli tämbri. Heli tämber sõltub algtingimustest, millest avalduvad kordujad A_n ja B_n . Kui keelt venitada kõrvale ja lasta lahti, siis tekib alati sama põhitoon, sest

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

ja

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} dx > 0, \quad \text{sest } \sin \frac{n\pi}{l} > 0$$

^{II}kuna $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha)$

Järgmised kordajad A_n , $n \geq 2$ on tunduvalt väiksemad. Kui algfunktsioon $\varphi(x)$ on paaritu keele keskpunkti suhtes, siis $A_1 = 0$ ja madalaim toon on sagedusega

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Kui helisevat keelt puudutada täpselt keskelt, siis muutub heli kõrgus järsult oktaavi võrra kõrgemaks (flažolett). Valemid

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad (21.5)$$

määravad keele võnkumise põhisageduse ja võnkeperioodi. Võnkeperiood on

1. võrdeline keele pikkusega
2. pöördvõrdeline ruutjuurega elastsusjõust
3. võrdeline ruutjuurega tihedusest

22 Suvalise võnkumise esitamine seisevlainete summana

Olgu $L(u)$ lineaarne diferentsiaaloperaator. Kehtib **üldistatud superpositsiooni printsiip**. Kui u_i ($i = 1, 2, \dots$) on homogeenise lineaarse võrrandi

$$L(u_i) = 0$$

erilahendiks, siis ka rida $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ on selle võrrandi lahendiks, eeldusel, et seda rida võib liikmeti diferentseerida.

Tõestus.

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i L(u_i) = 0$$

Üheks piisavaks tingimuseks, et rida oleks liikmeti diferentseeruv, on selle rea **ühtlane koondumine**.

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_n(x) \quad r_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$$

Rida koondub punktiks x , kui

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0(\varepsilon), \text{ et } n > n_0 \Rightarrow |r_n(x)| < \varepsilon$$

Funktsionaalrida $\sum_{i=1}^{\infty} u_n(x)$ on majoreeruv lõigul $[a, b]$, kui leidub selline koonduv arvrida $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, et

$$|u_n(x)| < \alpha_n, \quad n \geq n_0 \quad x \in [a, b]$$

Majoreeruvusest lõigul järgeldub ühtlane koondumine sellel lõigul (vastupidine ei pruugi kehtida).

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

Vaatleme punktis 20. saadud reakujulist lahendit (20.15)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (22.1)$$

kus

$$A_n = \varphi_n \quad B_n = \frac{1}{n\pi a} \psi_n \quad (22.2)$$

Selleks, et selle rea summa oleks pidev ja ta oleks liikmeti diferentseeruv, piisab kui see on ühtlaselt koonduv. On lihtne näha, et

$$u_n(x, t) = (|A_n| + |B_n|)$$

Järelikult arvrida

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (22.3)$$

on majoreeruvaks reaks reale (22.1).

Vaatleme tuletise $u_t(x, t)$ pidevust. Diferentseerides liikmeti saame

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \frac{n\pi}{l} \left(-A_n \sin \frac{n\pi at}{l} + B_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (22.4)$$

See rida on majoreeruv ja seega ka ühtlaselt koonduv, kui koondub rida

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|) \quad (22.5)$$

Selleks, et funktsioon $u(x, t)$ rahuldaks võrrandit, peavad ühtlaselt koonduma ka teiste tuletiste read

$$\begin{aligned} u_{xx} &\Rightarrow -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ u_{tt} &\Rightarrow -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

nende majoreeruvaks reaks on

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|) \quad (22.6)$$

Eespool olid saadud seosed (22.2) ja järelikult peavad koonduma read

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, & k = 0, 1, 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, & k = -1, 0, 1 \end{cases} \quad (22.7)$$

□

Fourier' ridade jaoks kehtib teoreem

Teoreem 22.1. *Kui perioodilisel funktsioonil $F(x)$ on k pidevat tuletist ja $k + 1$ -ne tuletis on tükati pidev, siis koondub arvurida*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) \quad (22.8)$$

kus a_n, b_n on funktsiooni $F(x)$ Fourier' kordajad.

Selleks, et lõigul $[0, l]$ antud funktsiooni $f(x)$ saaks esitada Fourier' reana siinusfunktsioonide $\sin \frac{n\pi x}{l}$ järgi, tuleb perioodilise funktsiooni $F(x)$ saamiseks jätkata $f(x)$ paaritu funktsioonina punktides $x = 0$ ja $x = l$. Sel juhul peavad olema täidetud tingimused

$$f(0) = 0 \quad \text{ja} \quad f(l) = 0$$

(vastasel juhul ei ole $F(x)$ pidev nendes punktides)

Esimene tuletis tuleb automaatselt pidev punktides $x = 0$ ja $x = l$. Paarisarvuliste tuletiste pidevuse jaoks peavad kehtima

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0, \quad k = 0, 2, 4 \dots$$

Selleks, et koonduksid read (22.7) tuleb täita järgmised tingimused

1. $f(x)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, kolmas tuletis on tükati pidev ja kehtivad võrdused

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0 \quad (22.9)$$

2. $\psi(x)$ -l on pidev tuletis ja teine tuletis on tükati pidev. Kehtivad võrdused

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

Need tingimused on piisavad muutujate eraldamise meetodi kasutamiseks, kuid nad esitavad täiendavaid nõudeid võrreldes lahendi olemasolu teoreemiga ($\varphi(x)$ kaks korda ja $\psi(x)$ üks kord pidevalt diferentseeruv).

23 Mittehomogeenne võrrand

Vaatleme võrrandit

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \quad (23.1)$$

algtingimustega

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (23.2)$$

ja rajatingimustega

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (23.3)$$

Otsime lahendit Fourier' reana x -järgi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (23.4)$$

kus $u_n(t)$ on otsitavad funktsioonid.

Esitame $f(x, t)$ ja algtingimused Fourier' ridadena

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{array} \right. \quad (23.5)$$

Asendades võrrandis (23.1) $f(x, t)$ ja $u(x, t)$ ridadega, saame

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ -a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0$$

Siin kõik siinustes kordajad on nullid

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t) \quad (23.6)$$

see on tavaline teist järku diferentsiaalvõrrand

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

Järelikult saame

$$\begin{cases} u_n(0) = \varphi_n \\ \dot{u}_n(0) = \psi_n \end{cases} \quad (23.7)$$

Need kaks tingimust määravad üheselt võrrandi (23.6) lahendi. Lahendi $u_n(t)$ saame esitada summana

$$u_n(t) = u_n^{(1)}(t) + u_n^{(2)}(t)$$

kus

$$u_n^{(1)} = \frac{l}{n\pi a} \int_0^t \sin \frac{n\pi x}{l} (t - \tau) f_n(\tau) d\tau \quad (23.8)$$

on mittehomogeense võrrandi lahendiks nulliliste algtingimustega (saab kontrollida vahetult)

$$u_n^{(2)} = \varphi_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + \frac{1}{n\pi a} \psi_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \quad (23.9)$$

on homogeense võrrandi lahend mittenulliliste algtingimustega (23.2). Seega saame lahendi kujul

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \int_0^l \sin \frac{n\pi a}{l} (t - \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} f_n(\tau) d\tau + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + \frac{1}{n\pi a} \psi_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (23.10)$$

Teine summa kujutab keele vabavõnkeid antud algtingimustel. Vaatleme lähemalt esimest summat, mis kujutab keele sundvõnkeid nulliliste algtingimustega. Kasutades $f_n(t)$ avaldist leiame.

$$u^{(1)}(x, t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi a} \sin \frac{n\pi a}{l} (t - \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \right\} f(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$\int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (23.11)$$

kus

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \quad (23.12)$$

on Greeni funktsioon.

Leiame antud lahendi füüsikalise tähenduse. Olgu $f(x, t)$ nullist erinev punkti $P(\xi_0, \tau_0)$ väikeses ümbruses

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta\tau$$

Korrutis $\rho \cdot f(x, t)$ on mõjuva jõu tihedus. Lõigule $[\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi]$ mõjuv jõud on

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} f(\xi, \tau) d\xi$$

ning selle jõu impulss I aja Δt jooksul on

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} F(\tau) d\tau = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

teisendame $u(x, t)$ avaldist kasutades keskväärtusteoreemi

$$u(x, t) = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau =$$

$$G(x, \bar{\xi}, t - \bar{\tau}) \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta\xi} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (23.13)$$

kus $\bar{\xi} \in [\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi]$; $\bar{\tau} \in [\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau]$

Minnes üle piirväärtusele, kui $\Delta\xi \rightarrow 0$, $\Delta\tau \rightarrow 0$, saame

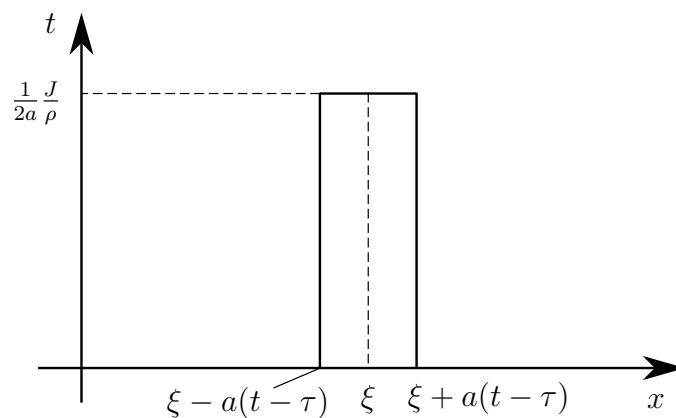
$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t - \tau_0) \frac{I}{\rho}, \quad (23.14)$$

mida saab vaadelda, kui hetkelise punktimpulsi I mõju. Kui on teada üksiku punktimpulsi mõjufunktsioon $\frac{I}{\rho}G(x, \xi, t - \tau)$, siis tihedusega $f(x, t)$ esitatud jõu mõju ongi

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

mis oligi saadud eespool.

Vaatleme aja momenti t , mis on momendile τ nii lähedal, et peegeldumine otspunktidest $x = 0$ ja $x = l$ ei avalda veel mõju. Esitame selle funktsiooni Fourier reana



siinuste $\sin \frac{n\pi x}{l}$ järgi. Võtame lihtsuse mõttes $I = \rho$. Fourier kordajad on

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{l} \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{al} \int_{\xi - a(t - \tau)}^{\xi + a(t - \tau)} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{an\pi} \left\{ \cos \frac{n\pi}{l} [\xi - a(t - \tau)] - \cos \frac{n\pi}{l} [\xi + a(t - \tau)] \right\} = \\ &= \frac{2}{an\pi} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} \end{aligned}$$

siit

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi a(t - \tau)}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \quad (23.15)$$

see langeb kokku valemiga (23.12), mille saime muutujate eraldamise meetodil.

Ajamomendi t jaoks, kus rajatingimuste mõju on olemas, on Greeni funktsiooni konstrueerimine karakteritsikute abil keeruline. Fourier rea kujuline esitus jääb aga ka siis kehtima.

24 Ilma algtingimusteta rajaülesanne

Ilma algtingimusteta ülesannet vaadeldakse suhteliselt suurte ajamomentide korral, kus algtingimuste mõju on hääbunud. Reaalsetes süsteemides on alati hõõrdejõud, mis kiirendavad algtingimuste mõju hääbumist.

Vaatleme hõõrdejõude arvestavat ülesannet

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t & 0 < x < l, \quad t > -\infty \\u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t)\end{aligned}\tag{24.1}$$

siin liige αu_t kujutab hõõrdejõudu, mis on võrdeline kiirusega. Vaatleme algul perioodiliste rajatingimustega ülesannet

$$\begin{cases} u(l, t) = A \cos \omega t & (\text{või } u(l, t) = B \sin t) \\ u(0, t) = 0 \end{cases}\tag{24.2}$$

Mugavam on rajatingimusi esitada komplekse funktsioonina

$$u(l, t) \stackrel{\text{I}}{=} A e^{i\omega t}\tag{24.3}$$

Siis

$$u(x, t) = V(x, t) + iW(x, t)$$

$V(x, t)$ on lahendi reaalosa ja $W(x, t)$ imaginaarosa, mis rahuldavad rajatingimust

$$V(l, t) = A \cos \omega t, \quad W(l, t) = A \sin \omega t$$

Seega lahendame ülesannet

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A e^{i\omega t} \end{cases}\tag{24.4}$$

Otsime lahendit korrutise kujul

$$u(x, t) = p(x) \cdot e^{i\omega t}$$

^IEuleri valem $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

Asendades võrrandisse leiame

$$\begin{cases} p'' + k^2 p = 0 & k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha \frac{\omega}{a^2} \\ p(0) = 0, \quad p(l) = A \end{cases} \quad (24.5)$$

Seega $p(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$.

Esimene rajatingimus annab $C_2 = 0$ ja teine $C_1 = \frac{A}{\sin kl}$. Järelikult

$$p(x) = A \frac{\sin kx}{\sin kl} = q(x) + ir(x) \quad (24.6)$$

Otsitava lahendi jaoks saame

$$u(x, t) = (q(x) + ir(x))e^{i\omega t} = V(x, t) + iW(x, t),$$

kus

$$V(x, t) = q(x) \cos \omega t - r(x) \sin \omega t$$

$$W(x, t) = q(x) \sin \omega t + r(x) \cos \omega t$$

Vaatleme piirprotsessi, kui $\alpha \rightarrow 0$. Sel juhul

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} k = \bar{k} = \frac{\omega}{a}$$

ja saame

$$\begin{cases} \bar{V}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} V(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \cos \omega t \\ \bar{W}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} W(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t \end{cases} \quad (24.7)$$

Vaatleme ülesannet hõrdejõuta

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > -\infty \\ u(0, t) = \mu_1(t) \quad u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (24.8)$$

Sel juhul on $\bar{V}(x, t)$ ja $\bar{W}(x, t)$ ülesande (24.8) lahendid, mis vastavad rajatingimustele

$$\bar{V}(0, t) = 0, \quad \bar{V}(l, t) = A \cos \omega t$$

$$\bar{W}(0, t) = 0, \quad \bar{W}(l, t) = A \sin \omega t$$

Ülesande (24.8) lahend ei eksisteeri alati. Kui sundvõnkumise sagedus ω langeb kokku kinnitatud keele omavõnkesagedusega

$$\omega = \omega_n = \frac{n\pi a}{l}$$

siis on valemite (24.7) nimetajad nullid ja lahend ilma algtingimusteta ei eksisteeri. Se-da nähtust nimetatakse resonantsiks. Võnkeamplituud hakkab tõkestamatult kasvama ja püsivat režiimi ei leidu. Hõõrdejõu olemasolu korral on püsirežiim olemas, mistahes sageduse ω korral, sest

$$\sin kl \neq 0, \quad \text{kui } k \text{ on kompleksne}$$

Olgu rajatingimus antud perioodilise funktsiooniga $\mu(t)$, mille saab esitada Fourier' reana

$$\mu(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t)$$

siis $\alpha = 0$ korral on lahendiks

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l}x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \sin \omega n t) \frac{\sin \frac{n\omega}{a}x}{\sin \frac{n\omega}{a}l}$$

tingimusel, et ükski sagedus $n\omega$ ei lange kokku kinnitatud keele omavõnkesagedusega.

Kui $\mu(t)$ ei ole perioodiline, siis saab selle esitada Fourier integraalina ja ka ülesande lahend saab Fourier integraali kuju

Ülesande $\alpha = 0$ korral lahend ei ole ühene. Tõepoolest, me võime lisada mingile la-hendile avaldise

$$\sum \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l}t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

kus A_n, B_n on suvalised konstandid ja saame jälle ülesande lahendi.

Saamaks ühese lahendi, toome sisse lisatingimuse- "hääbuva hõõrde tingimuse". Me ütleme, et ülesanne (24.8), kus $\alpha = 0$, rahuldab hääbuva hõõrde tingimust, kui see on saadud ülesande (24.1) ($\alpha \neq 0$) lahendist piirväärtusena, kui $\alpha \rightarrow 0$.

25 Muutujate eraldamise meetod üldkujul

Vaatleme mittehomogeense keele ülesannet

$$L(u) = (k(x)u_x)_x - q(x)u = \rho(x)u_{tt}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (25.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (25.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (25.3)$$

k, q ja ρ on lõigul $[0, l]$ pidevad ja positiivsed funktsioonid ($k > 0, \rho > 0, q \geq 0$). Otsime lahendit korrutise kujul

$$u(x, t) = p(x)v(t)$$

Asendades võrrandisse ja eraldades muutujad saame

$$\begin{aligned}(k(x)p')' - qp + \lambda\rho p &= 0 \\ v'' + \lambda v &= 0\end{aligned}$$

Funktsiooni $p(x)$ jaoks saame järgmise omaväärtusülesande. Leida niisugused λ väärtused, mille korral eksisteerib nullist erinev lahend ülesandele

$$\begin{aligned}L(p) + \lambda\rho p &= 0 \\ p(0) = p(l) &= 0\end{aligned}\tag{25.4}$$

λ on operaatori $L(u)$ omaväärtused ja vastavad lahendid omafunktsioonid. Sturm-Liouvile'i ülesanne. Põhilised tulemused:

1. Eksisteerib loenduv hulk omaväärtusi

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

millele vastavad omafunktsioonid

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), \dots$$

2. Kui $q \geq 0$, siis omaväärtused on positiivsed
3. Erinevad omafunktsioonid on ortogonaalsed kaaluga $\rho(x)$

$$\int_0^l p_x(x)p_n(x)\rho(x) dx = 0, \quad n \neq k\tag{25.5}$$

4. Reaksarenduse teoreem

Teoreem 25.1. *Suvalise kaks korda pidevalt diferentseeruva funktsiooni $F(x)$, mis rahuldab tingimusi $F(0) = F(l) = 0$, saab esitada absoluutselt ja ühtlaselt koonduva reana omafunktsioonide $p_n(x)$ järgi.*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n p_n(x), \quad F_n = \frac{1}{\|p_n\|} \int_0^l F(x) p_n(x) \rho(x) dx \quad (25.6)$$

$$\|p_n\|^2 = \int_0^l p_n^2(x) \rho(x) dx$$

Väiteid 1 ja 4 tõestatakse tavaliselt integraalvõrrandite abil ja neid me ei vaatle.

Tõestus. Tõestame Greeni valemi. Vaatleme vahet

$$uL(v) - vL(u) = u(kv')' - v(ku')' - \cancel{uqv} + \cancel{vqu} = [k(uv' - u'v)]'$$

Integreerides võrdust rajades a -st, b -ni saame Greeni valemi

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = k(uv' - u'v) \Big|_a^b \quad (25.7)$$

Olgu $p_k(x)$ ja $p_n(x)$ kaks omafunktsiooni, mis vastavad omaväärtustele λ_k ja λ_n . Võttes Greeni valemis $u = p_k(x)$ ja $v = p_n(x)$, saame

$$\int_0^l [p_k L(p_n) - p_n L(p_k)] dx = 0$$

seega

$$(\lambda_n - \lambda_k) \int_0^l p_k(x) p_n(x) \rho(x) dx = 0$$

et $\lambda_n \neq \lambda_k$, siis

$$\int_0^l p_k(x) p_n(x) \rho(x) dx = 0$$

mis on (25.5).

□

Tõestus. Näitame, et igale omaväärtusele vastab kordaja täpsusega üks omafunktsioon. Olgu $\bar{p}(x)$ ja $\tilde{p}(x)$ kaks omafunktsiooni, mis vastavad samale omaväärtusele λ ja mis on nullid, kui $x = 0$. vaatleme funktsiooni

$$\tilde{p}(x) = \frac{\bar{p}'(0)}{\tilde{p}'(0)} \tilde{p}(x)$$

($\bar{p}' \neq 0$, sest algtingimustele $\bar{p}(0) = 0$, $\bar{p}'(0) = 0$ vastab üheselt null-lahend $\bar{p}(x) \equiv 0$)
 See funktsioon rahuldab sama võrrandi ja samu lisatingimusi, mis $\bar{p}(x)$

$$\begin{aligned}\tilde{p}(0) &= \frac{\bar{p}'(0)}{\bar{p}'(0)}\bar{p}(0) = 0 \\ \tilde{p}'(0) &= \frac{\bar{p}'(0)}{\bar{p}'(0)}\bar{p}'(0) = \bar{p}'(0)\end{aligned}$$

Teist järku võrrandi algtingimustega ülesande lahendi ühesusest järeldub, et $\tilde{p}(x) = \bar{p}(x)$. Seega

$$\bar{p}(x) = r\bar{p}(x), \quad r = \frac{\bar{p}'(0)}{\bar{p}'(0)}$$

□

Seega omafunktsioonid on määratud konstantse kordaja täpsusega. Üheselt määramiseks tuleb lisada mingi tingimus. Näiteks normeerimistingimus

$$\|p_n\|^2 = \int_0^l p_n^2(x)\rho(x) dx = 1$$

Saame ortonormeeritud omafunktsioonide süsteemi

$$\int_0^l p_k(x)p_n(x)\rho(x) dx = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Vaatleme väidet 2. Olgu p_n normeeritud omafunktsioon, mis vastab omaväärtustele x_n

$$L(p_n) = -\lambda_n\rho(x)p_n(x)$$

Korrutame mõlemad pooled $p_n(x)$ -ga ja integreerime

$$\lambda_n \underbrace{\int_0^l p_n^2(x)\rho(x) dx}_{=1 \text{ (ortonormeeritus)}} = - \int_0^l p_n(x)L(p_n) dx$$

Siit

$$\lambda_n = - \int_0^l p_n(k(x)p_n')' dx + \int_0^l q(x)p_n^2(x) dx$$

Integreerime ositi ja kasutame rajatingimusi

$$\begin{aligned}\lambda_n &= -p_n k p_n' \Big|_0^l + \int_0^l k(x)(p_n')^2 dx + \int_0^l q(x)p_n^2(x) dx = \\ &= \underbrace{\int_0^l k(x)(p_n')^2 dx}_{>0} + \underbrace{\int_0^l q(x)p_n^2(x) dx}_{\geq 0} > 0\end{aligned}$$

Siit $\lambda_n > 0$, sest $k(x) > 0$ ja $q(x) \geq 0$. Teise tegusi $v(t)$ jaoks saime võrrandi

$$v'' + \lambda_n v = 0$$

ilma lisatingimusteta. Et $\lambda > 0$, siis on üldlahendiks

$$v_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} \cdot t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} \cdot t$$

kus A_n ja B_n on mingid arvkoordajad. Järelikult on ilma algtingimusteta ülesandel lõpmata palju lahendeid

$$u_n(x, t) = p_n(x)v_n(t) = \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n} \cdot t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} \cdot t \right) p_n(x)$$

Antud algtingimuste korral otsime lahendit rea kujul

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{\lambda_n} \cdot t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} \cdot t \right) p_n(x) \quad (25.8)$$

Esitame algtingimused Fourier' ridadena

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n p_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n p_n(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n p_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B_n p_n(x) \end{aligned}$$

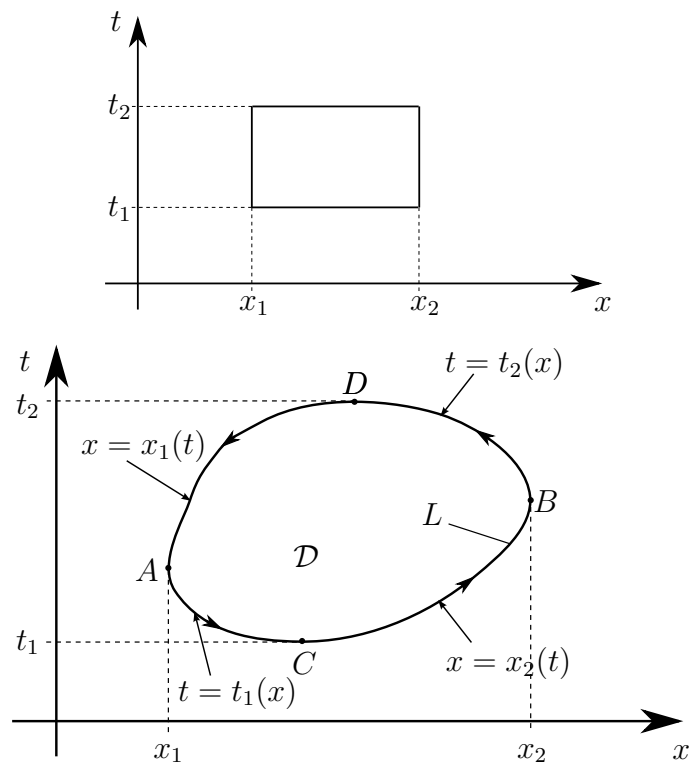
Seega

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (25.9)$$

26 Rajaülesanne, mille lisatingimused on antud karakteristikutel

Vaatleme esimese rajaülesande teatud variante keele võnkumise võrrandi jaoks. Keele võnkumise võrrandi tuletamisel saime seose

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] \rho(x) dx = \\ T_0 & \int_{t_1}^{t_2} [u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] dt + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(x, t) dx dt \end{aligned}$$



Vaatleme (x, t) tasandil piirkonda \mathcal{D} , mis on piiratud joonega $L : g(x, t) = 0$.

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] \rho(x) dx = - \oint_L u_t(x, t) \rho(x) dx$$

$$T_0 \int_{t_1}^{t_2} [u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] dt = \oint_L k(x) u_x(x, t) dt$$

Saime

$$\oint_L (\rho u_t dx + T_0 u_x dt) + \iint_{\mathcal{D}} F(x, t) dx dt = 0 \quad (26.1)$$

Homogeense keele korral

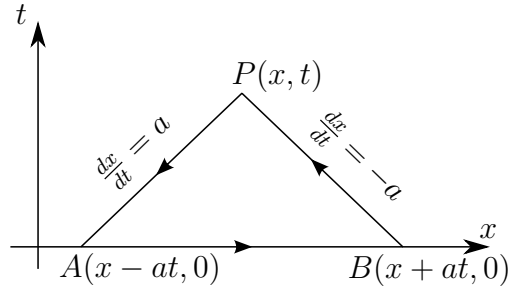
$$\oint_L (u_t dx + a^2 u_x dt) + \iint_{\mathcal{D}} f(x, t) dx dt = 0 \quad (26.2)$$

kus $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$

Vaatleme seda võrrandit koos algtingimustega

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

Leiame lahendi punktis $P(x, t)$. Vaatleme karakteristilist kolmnurka ABP , kus külgedeks AP ja BP on karakteristikute lõigud.



Küljel AP on $\frac{dx}{dt} = a$ ja $u_t dx + a^2 u_x dt = a(u_t dt + u_x dx) = adu$. Küljel BP on $\frac{dx}{dt} = -a$ ja $u_t dx + a^2 u_x dt = -a(u_t dt + u_x dx) = -adu$. Seega karakteristikute peal on joonintegraal aluseks avaldises täisdiferentsiaal du

$$\begin{aligned} \int_B^P (u_t dx + a^2 u_x dt) &= -au \Big|_P^B = -au \Big|_P + au \Big|_B \\ \int_P^A (u_t dx + a^2 u_x dt) &= au \Big|_P^A = au \Big|_A - au \Big|_P \\ \int_A^B (u_t dx + a^2 u_x \underbrace{dt}_{=0}) &= \int_{x-at}^{x+at} u_t(\xi, 0) d\xi = \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

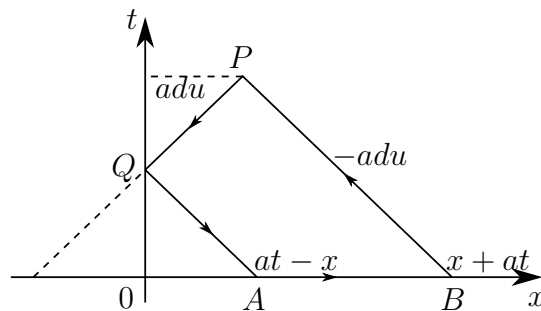
Valem (26.2) annab

$$-2au(x, t) + au(x + at, 0) + au(x - at, 0) + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \iint_{\mathcal{D}} f(x, t) dx dt = 0$$

Saame d'Alembert'i valemi

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (26.3)$$

Vaatleme I rajaülesannet poolsirgel, eeldades $u(0, t) = \mu(t)$, kui $t < \frac{x}{a}$, siis on lahendiks (26.3), sest rajatingimus ei avalda veel mõju. Olgu $t > \frac{x}{a}$, lisaks $a^2 = \frac{k}{\rho}$, $\rho = \text{const}$, $\frac{F(x, t)}{\rho} = f(x, t)$. Vaatleme nelinurka $ABPQ$, mille moodustavad karakteristikud ja x -



telg. Siis saame

$$-au\Big|_P + au\Big|_B + au\Big|_Q + au\Big|_P - au\Big|_A + au\Big|_Q + \int_A^B u_t dx + \iint_{\mathcal{D}} f(x, t) dx dt = 0$$

$$au\Big|_Q = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

$$lu(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad t > \frac{x}{a} \quad (26.4)$$

$$(u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t = a\bar{t} \Rightarrow u_{tt} = u_{xx})$$

Algtingimused $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ ja rajatingimus $u(0, t) = \mu(t)$ määravad üheselt lahendi. Seega peab tuletise väärtus $u_x(x, t)$ punktis $x = 0$ olema seotud teiste lisatingimustega. Võttes valemis (26.4) tuletise x järgi ja leides selle väärtuse kohal $x = 0$ saame (eeldame, et $f(x, t) = 0$)

$$u_x(x, t) = -\frac{1}{a}\mu'\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}[\varphi'(x + at) + \varphi'(at - x)] + \frac{1}{2a}[\psi(x + at) - \psi(x - at)]$$

$$u_x(0, t) = -\frac{1}{a}\mu'(t) + \varphi'(at) + \frac{1}{a}\psi(at)$$

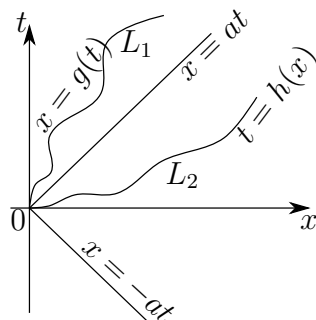
ehk

$$u_x(0, t) + \frac{1}{a}u_t(0, t) = u_x(0, at) + \frac{1}{a}u_t(0, at)$$

Siit järeldub, et sirgetel $x = 0$ ja $t = 0$ ei saa anda sümmeetrilisi lisatingimusi.

Lisatingimusi võib anda ka joontel, mis erinevad sirgetest $x = 0$ ja $t = 0$. Rajatingimusi võib püstitada joonel $L_1 : x = g(t)$ faasitasandil. Selleks, et selline ülesanne oleks lahenduv, peab see joon lisaks piisavale siledusele rahuldama veel teatud tingimusi. Joon L_1 peab asuma ülalpool karakteristikut $x = at$. Kui kasvõi üks selle joone punkt oleks karakteristikust allpool, oleks lahend täielikult määratud algtingimustega ja talle ei saaks anda suvalisi väärtuseid joonel L_1 .

Algväärtused võib anda lisaks x -teljele ka mingil joonel $L_2 : t = h(x)$, mis peab rahuldama tingimust $|h'(x)| < \frac{1}{a}$. Rakenduste jaoks on olulisem anda lisatingimused karakteristikutel.



27 Karakteristikutel antud lisatingimustega ülesande lahendamine lähendusmeetodil

Vaatleme lihtsaimat ülesannet

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x, y) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, y) = \psi(y) \end{cases} \quad (27.1)$$

Lisatingimused on antud sirgetel $x = 0$ ja $y = 0$, mis on võrrandi karakteristikud. Eeldame, et $\varphi(x)$ ja $\psi(y)$ on diferentseeruvad ja rahuldavad kooskõla tingimust $\varphi(0) = \psi(0)$. Integreerime võrrandit x ja y järgi

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y) d\xi \\ u(x, y) &= u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi \end{aligned}$$

ehk

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (27.2)$$

Lihtsaima võrrandi lahend avaldub valemiga (27.2), millest järeldub lahendi olemasolu ja ühesus.

Vaatleme lineaarset hüperboolset võrrandit

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y) \quad (27.3)$$

koos lisatingimustega karakteristikutel

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) \\ u(0, y) &= \psi(y) \end{aligned} \quad (27.4)$$

Eeldame, et a, b, c on pidevad ja $\varphi(0) = \psi(0)$.

Võrrandist (27.3) järeldeb, et $u(x, y)$ rahuldab integro-diferentsiaalvõrrandit.

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta + \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (27.5)$$

Leiame lahendi lähendusmeetodil. Alglähendiks võtame $u_0(x, y) \equiv 0$. Võrrandist (27.5) saame järgmiste lähendite avaldised

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ \dots \\ u_n(x, y) = u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u_{n-1} \right] d\xi d\eta \end{array} \right. \quad (27.6)$$

Siit saame tuletiste jaoks

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta) u_{n-1} \right] d\eta$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, y) u_{n-1} \right] d\xi$$

Saab tõestada jada

$$\{u_n\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x} \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y} \right\}$$

koonduvad ühtlaselt, kui $n \rightarrow \infty$.

28 Paraboolse võrrandi rajaülesanded

Paraboolsete võrrandite $u_t = a^2 \Delta u + f$ korral antakse vaid üks algtingimus $u(x, t_0) = \varphi(x)$. Rajatingimused võivad olla erinevad.

1. Antud väärtus punktis $x = 0$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

kus T on aeg, mille jooksul protsessi uuritakse

2. Tuletis punktis $x = l$ (soojusvoog, kui $x = l$)

$$u_x(l, t) = \nu(t)$$

Soojusvoog on võrdeline tuletisega

$$Q(l, t) = -ku_x(l, t)$$

3. III-liiki rajatingimus punktis $x = l$

$$u_x(l, t) = -\lambda[u(l, t) - \vartheta(t)]$$

Sellele rajatingimusele vastab soojusvahetus ümbritseva keskkonnaga (temperatuuriga $\vartheta(t)$) otspunktis $x = l$. λ on siis soojusvahetuskoeffitsient. Punktis $x = 0$ on analoogne tingimus

$$u_x(0, t) = \lambda[u(0, t) - \vartheta(t)]$$

Otspunktides võivad olla erinevat liiki rajatingimused. I-liiki rajaülesanne omab kuju

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = \mu_1(t), & u(l, t) = \mu_2(t), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (28.1)$$

Võib vaadelda ülesannet kogu teljel, ilma rajatingimusteta

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, & 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (28.2)$$

või ülesannet poolteljel

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x < +\infty \\ u(0, t) = \mu(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (28.3)$$

Kui vaadelda lahendit suurte aja t väärtuste korral, siis on algtingimuste mõju väike ja või püstitada ülesande ilma algtingimusteta.

29 Maksimumprintsiiip

Vaatleme konstantsete kordajatega võrrandit

$$v_t = \alpha^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v$$

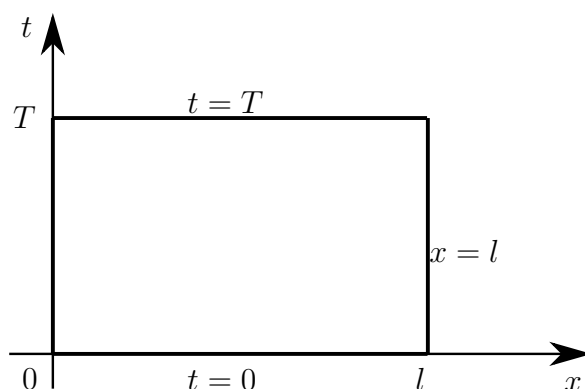
selle võrrandi saab teisendada lihtsamale kujule teistendusega

$$v = e^{\mu x + \lambda t} u,$$

kus $\mu = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $\lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}$. Saamegi

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

Teoreem 29.1. Maksimumprintsiiip. Olgu $u(x, t)$ soojusjuhtivusvõrrandi $u_t = a^2 u_{xx}$ lahendiks piirkonnas $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$, siis see funktsioon saavutab oma suurima või vähima väärtuse, kas algmomendil $t = 0$ või rajapunktides $x = 0$, $x = l$.



Tõestus. Tähistame funktsiooni $u(x, t)$ maksimaalse väärtuse M , kui $t = 0$ või $x = 0$, $x = l$. Oletame vastuväiteliselt, et mingis punktis $P(x_0, t_0)$ on lahendil suurem väärtus, kui M

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

kus $t_0 \in (0, T]$, $x_0 \in (0, l)$ Et punktis $P(x_0, t_0)$ on maksimum, siis

$$u_x(x_0, t_0) = 0 \quad \text{ja} \quad u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$$

ja $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ Täpsemalt $u_t(x_0, t_0) = 0$, kui $t_0 < T$ ja $u_t(x_0, T) \geq 0$. Seega võrrand $u_t = a^2 u_{xx}$ vasaku ja parema poole märgid on erinevad. Teoreem pole veel tõestatud, sest mõlemad pooled võivad olla nullid.

Leiame ühe punkti $Q(x_1, t_1)$, kus $u_{xx} \leq 0$ ja $u_t > 0$. Vaatleme abifunktsiooni

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t),$$

kus $k = \text{const}$. Siis

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

$$k(t_0 - t) \leq kT$$

Valime $k > 0$ nii, et $kT < \frac{\varepsilon}{2}$, ehk $k < \frac{\varepsilon}{2T}$. Sel juhul $v(x, t)$ väärtus $t = 0$ ja $x = 0$, $x = l$ korral ei ületa $M + \frac{\varepsilon}{2}$

$$v(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2},$$

kui $t = 0$, $x = 0$, $x = l$. Et $v(x, t)$ on pidev, siis ta saavutab oma maksimaalse väärtuse mingis punktis $Q(x_1, t_1)$

$$v(t_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

seejuures $0 < t_1 \leq T$, $0 < x_1 < l$. Punktis $Q(x_1, t_1)$, $v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$, $v_t(x_1, t_1) \geq 0$.

Järelikult

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1)$$

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \geq k > 0$$

Seega võrrand $u_t = a^2 u_{xx}$ ei ole rahuldatud punktis $Q(x_1, t_1)$, mis tõestab teoreemi. □

Analoogselt saab vaadelda ka $u(x, t)$ miinimumi.

Teoreem 29.2. *Soojusjuhtivusvõrrandi esimese rajaülesande lahend on ühene.*

Tõestus. Piisab kui vaadelda kahe lahendi vahet

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = v(x, t)$$

Siis $v(x, t)$ väärtused, kui $t = 0$, $x = 0$ või $x = l$ on nullilised. Maksimumprintsipi järel, et $v(x, t)$ on konstantselt null

$$v(x, t) \equiv 0 \quad \text{ja} \quad u_1(x, t) = u_2(x, t)$$

□

30 Muutujate eraldamise meetod soojusjuhtuvusvõrrandi korral

Vaatleme I rajaülesannet

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (30.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (30.2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0 \quad (30.3)$$

Alustame homogeenest võrrandist

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T \quad (30.4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (30.5)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (30.6)$$

Otsime lahendit korrutise kujul

$$u(x, t) = p(x) \cdot q(t)$$

Siis $pq' = a^2 p''q$ ehk $\frac{1}{a^2} \frac{q'}{q} = \frac{p''}{p} = -\lambda$, millest

$$p'' + \lambda p = 0 \quad (30.7)$$

$$q' + a^2 \lambda q = 0 \quad (30.8)$$

Rajatingimustest

$$p(0) = p(l) = 0 \quad (30.9)$$

$p(x)$ leidmiseks saame Sturm-Liouville'i omaväärtusülesande (30.7)-(30.9), mida uurisime juba hüperboolsete võrrandite korral. Omaväärtuste

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (30.10)$$

jaoks eksisteerivad omafunktsioonid

$$p_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (30.11)$$

Lisaks saame $q_n(t)$

$$q_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (30.12)$$

kus C_n on mingi konstant. Järelikult

$$u_n(x, t) = p_n(x) q_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

on võrrandi (30.4) erilahendiks, mis rahuldab nullilisi rajatingimusi. Algtingimuste rahuldamiseks moodustame rea

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (30.13)$$

Esitades $\varphi(x)$ Fourier' reana, saame

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Seega võrdusest $u(x, 0) = \varphi(x)$ jäeldub, et

$$C_n = \varphi_n$$

Näitame, et $t \geq \bar{t} > 0$ (\bar{t} on suvaline väärtus) korral tuletiste read

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_t, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_{xx}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

koonduvad ühtlaselt

$$|(u_n)_t| = \left| -C_n a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \right| < |C_n| \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 e^{-(\frac{\pi a}{l})^2 t}$$

Olgu $\varphi(x)$ tõkestatud $|\varphi(x)| < M$, siis

$$|C_n| = \left| \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right| < 2M$$

Järelikult

$$(u_n)_t < N n^2 e^{-kn^2 \bar{t}}, \quad N = 2M \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2, \quad k = \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$$

kui $t \geq \bar{t}$. Analoogselt

$$|(u_n)_{xx}| < N_1 n^2 e^{-kn^2 \bar{t}}, \quad N_1 = 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \quad \text{kui } t \geq \bar{t}$$

Vaatleme majoreerivat rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-kn^2 \bar{t}}$$

Siis d'Alembert'i tunnuse põhjal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{e^{-k(n+1)^2 \bar{t}}}{e^{-kn^2 \bar{t}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 e^{-k(2n+1)\bar{t}} = 0$$

Seega majoreeriv rida koondub ja $u(x, t)$ ja tema tuletiste read koonduvad ühtlaselt ja neid võib liikmeti diferentseerida. Järelikult rida (30.13) on homogeense ülesande lahendiks. Esitame lahendi kujul

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-k_n t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad k_n = \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 > 0 \quad (30.14)$$

Et $|u_n(x, t)| < |\varphi_n|$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$, siis rida (30.14) koondub ühtlaselt. Kui algingimus $\varphi(x)$ rahuldab võrduseid $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, siis on lahend $u(x, t)$ pidev. Teisendame valemit (30.14)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-k_n t} \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi \right] e^{-k_n t} \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n t} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \right] \varphi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Tähistame

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n(t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l}, \quad k_n = \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \quad (30.15)$$

See on Greeni funktsioon, mis võimaldab esitada lahendi kujul

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad (30.16)$$

Greeni funktsioon on hetkelise punktsoojusallika mõjufunktsioon. $G(x, \xi, t)$ muutuja x funktsioonina näitab temperatuuri jaotust vardas momendil t , kui algmomendil $t = 0$ oli temperatuur null ja punktis $x = \xi$ eraldus teatud hulk soojust. Eeldame, et $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x)$ on positiivne, pidev ja diferentseeruv väikeses vahemikus $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Vastav soojushulk on

$$C\rho \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = 0$$

Soojuse liikumist kirjeldab avaldis

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi \quad (30.17)$$

Läheme üle piirväärtusele, kui $\varepsilon \rightarrow 0$, kasutades keskvaartusteoreemi saame

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x, \xi, t) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = G(x, \bar{\xi}, t) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = G(x, \bar{\xi}, t) \frac{Q}{C\rho}, \quad \bar{\xi} \in (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$$

Seega

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = \frac{Q}{C\rho} G(x, \xi, t) \quad (30.18)$$

Siit $G(x, \xi, t)$ esitab temperatuuri punktis x , momendil t , mis on esile kutsutud hetkelise punktsoojusallikaga võimsusega $Q = C\rho$, mis hetkel $t = 0$ oli punktis ξ . Meie alg- ja rajatingimustest ning maksimumprintsibist järeldub, et

$$u_\varepsilon(x, t) \geq 0$$

Sellest järeldub, et ka $G(x, \xi, t) \geq 0$, kõigi x, ξ ja $t > 0$ korral. Saab näidata, et valem (30.16) jääb kehtima ka tükati pideva $\varphi(x)$ korral.

31 Mittehomogeenne soojusjuhtivusvõrrand

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (31.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (31.2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (31.3)$$

Otsime lahendit Fourier reana omafunktsioonide $\sin \frac{n\pi x}{l}$ järgi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (31.4)$$

Esitame ka $f(x, t)$ Fourier reana

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (31.5)$$

Asendades $u(x, t)$ võrrandisse saame

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left\{ \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t) \right\} = 0$$

Järelikult kõik siinuste kordajad on nullid

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t) \quad (31.6)$$

Algtingimusest

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0$$

ja

$$u_n(0) = 0 \quad (31.7)$$

Lahendades esimest järku võrrandi (31.6) nullilise algtingimusega, saame

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-k_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau, \quad k_n = \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 \quad (31.8)$$

Järelikult

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-k_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (31.9)$$

kasutades $f_n(t)$ avaldist, leiame

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n(t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \right\} d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (31.10)$$

kus

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n(t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l}$$

on sama Greeni funktsioon, mis oli võrduses (30.15). Seda funktsiooni võib vaadelda hetkelise punktsoojusallika mõjuna punktis ξ , hetkel τ .

Üldise ülesande

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases} \quad (31.11)$$

lahendi saab esitada kahe lahendi summana. Vaatleme lahendit kujul

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (31.12)$$

$v(x, t)$ jaoks saame ülesande

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} = \tilde{f}(x, t) = f(x, t) - [w_t - a^2 w_{xx}] \\ v(x, 0) &= \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - w(x, 0) \\ v(0, t) &= \tilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - w(0, t) \\ v(l, t) &= \tilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - w(l, t) \end{aligned}$$

Defineerime $w(x, t)$ nii, et $\tilde{\mu}_1(t), \tilde{\mu}_2(t) = 0$. Selleks piisab, kui

$$w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

Seega taandub ülesanne funktsiooni $v(x, t)$ leidmisele nulliliste rajatingimustega. Seda ülesannet vaatasime eespool.

Kui on tegemist statsionaarsete rajatingimustega ($\mu_1(t), \mu_2(t)$ on konstandid), siis on kasulikum eraldada statsionaarse ülesande lahend ja lisaliige, mis on kõrvalekaldeks statsionaarsest lahendist

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u(0, t) = u_0, \quad u(l, t) = u_1 \end{aligned}$$

Otsime lahendit kujul

$$u(x, t) = \tilde{u}(x) + v(x, t),$$

kus $\tilde{u}(x)$ on statsionaarne temperatuur ja $v(x, t)$ kõrvalekalle sellest

$$\begin{cases} \tilde{u}'' = 0, & \tilde{u}(0) = u_0, & \tilde{u}(l) = u_1 \\ v_t = a^2 v_{xx} \\ v(x, 0) = \varphi(x) - \tilde{u}(x) = \tilde{\varphi}(x) \\ v(0, t) = 0, & v(l, t) = 0 \end{cases}$$

Lahendi $v(x, t)$ saab leida muutujate eraldamise meetodil

32 Soojusjuhtivusülesanne sirgel

Vaatleme ülesannet

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (32.1)$$

kus $\varphi(x)$ on pidev funktsioon.

Nägime, et soojusjuhtivusvõrrandi lahend on ühtlane kui see on tõkestatud. Eraldame muutujad

$$u(x, t) = p(x)q(t) \quad (32.2)$$

Saame

$$\frac{p''}{p} = \frac{q'}{a^2 q} = -\lambda^2$$

Siit

$$q' + a^2 \lambda^2 q = 0$$

$$p'' + \lambda p = 0$$

Lahendades võrrandid leiame erilahendi kujul

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda)e^{-a^2 \lambda^2 t \pm i \lambda x} \quad (32.3)$$

kus λ on suvaline reaalarv. Moodustame funktsiooni

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{-a^2 \lambda^2 t + i \lambda x} d\lambda \quad (32.4)$$

Kui tuletisi saab leida diferentseerides integraali märgi all, siis see funktsioon rahuldab võrrandit (32.1). Nõuame algtingimuse rahuldamist

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)e^{i \lambda x} d\lambda$$

See on $A(\lambda)$ Fourier' teisendus. Pöördteisendus annab

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-i \lambda x} dx \quad (32.5)$$

Asendades (32.4) saame

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right] e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda \right] \varphi(\xi) d\xi \quad (32.6)$$

Saab näidata, et sisemise integraali jaoks kehtib võrdus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (32.7)$$

Järelikult

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi \quad (32.8)$$

kus

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (32.9)$$

on Greeni funktsioon (mõjufunktsioon). Seda funktsiooni nimetatakse ka **soojusjuhtivusvõrrandi fundamentaallahendiks**.

Funktsioon

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{Q}{C\rho 2a\sqrt{\pi}(t - t_0)} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

kujutab endast temperatuuri kohal x , hetkel t , kui algmomendil t_0 eraldub soojushulk

$Q = C\rho$. Soojushulk, mis on x -teljel hetkel $t > t_0$ on

$$C\rho \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t - t_0) dx = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{1}{2a\sqrt{t-t_0}} dx =$$

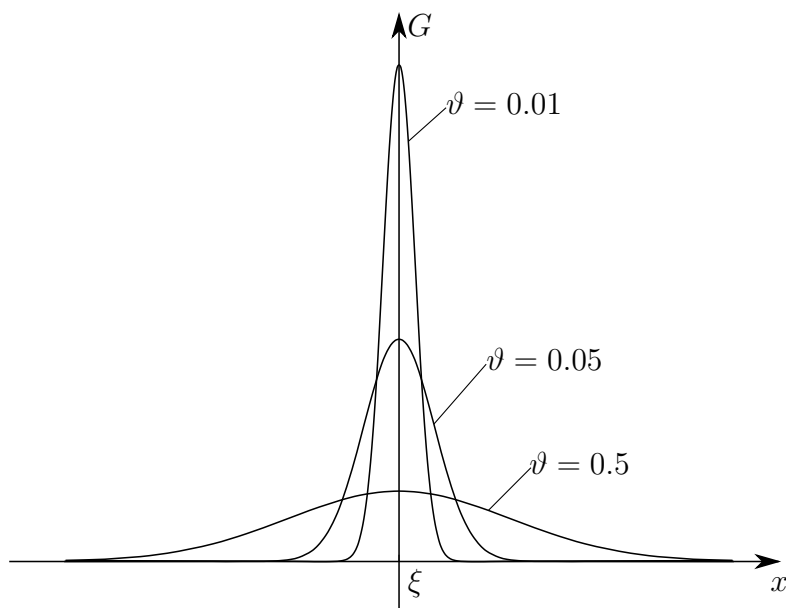
$$\left[z = \frac{x - \xi}{2a\sqrt{t - t_0}}, \quad dz = \frac{dx}{2a\sqrt{t - t_0}}, \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dx = -\sqrt{\pi}}_{\text{Poissoni integraal}} \right]$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = Q = C\rho$$

Seega soojushulk x -teljel jääb muutumatuks. [Laplace'i funktsioon $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$].

$G(x, \xi, t - t_0)$ sõltub ajast avaldise $\vartheta = a^2(t - t_0)$ kaudu. Järelikult

$$G(x, \xi, \vartheta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\vartheta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\vartheta}} \quad (32.10)$$



Saadud lahendit

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi) d\xi \quad (32.11)$$

nimetatakse ka Poissoni lahendiks (integraaliks). Iga tõkestatud funktsiooni $|\varphi(x)| < M$ korral, on $u(x, t)$ soojusjuhtivusvõrrandi tõkestatud lahendiks, kui $t > 0$. See lahend läheneb $\varphi(x)$ -le, kui $t \rightarrow 0$, kõikjal kus $\varphi(x)$ on pidev.

Integraalimärgi alune diferentseerimine on võimalik, kui avaldise tuletised on pidevad ja päratu integraal koondub ühtlaselt. Näitame, et lahend on tõkestatud

$$|u(x, t)| < M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz}_{=\sqrt{\pi}} = M,$$

kus $z = \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, $dz = \frac{1}{2a\sqrt{t}} d\xi$.

Integraalialune funktsioon ja kõik selle tuletised on pidevad. Vaatleme päratu integraali koondumist. Vaatleme tuletist

$$u_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

Päratu integraal on ühtlaselt koonduv, kui see on majoreeruv, st. leidub funktsioon $F(\xi)$, et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t) \right| \leq F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \quad \xi < -\bar{x} \quad (32.12)$$

mille jaoks koonduvad integraalid

$$\int_{x_1}^{+\infty} F(\xi) d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{-x_1} F(\xi) d\xi < \infty$$

x_1 on väärtus, alates millest kehtib võrratus (32.12). Leiame integreeritava, avaldise ülemise tõkendi

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t) \varphi(\xi) \right| &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2a^3 t^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2a^3 t_1^{3/2}} e^{-\frac{-(\xi-\bar{x})^2}{4a^2 t_2}} = F(\xi), \end{aligned}$$

kui $\xi < \bar{x}$, kõigi $|x| \leq \bar{x}$ ja $t_1 \leq t \leq t_2$ korral. Integraali koondumine

$$\int_{x_1}^{+\infty} F(\xi) d\xi = \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{+\infty} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2a^3 t_1^{3/2}} e^{-\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2 t_2}} d\xi = \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{2a^3 t_1^{3/2}} \int_{x_1-\bar{x}}^{+\infty} (\xi_2 + 2\bar{x}) e^{-c\xi_1^2} d\xi$$

$$\xi_1 = |\xi| - \bar{x}, \quad c = \frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t_2}$$

Integraal avaldisest $(a\xi + b)e^{-c\xi^2}$ koondub. Analoogselt saab vaadelda ka teist päratut integraali. Järelikult tuletise u_x saab leida diferentseerides integraalimärgi all. Sama tulemus kehtib ka teiste tuletiste u_t ja u_{xx} jaoks. Näitame nüüd, et

$$\lim_{x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x_0)$$

kõigis punktides x_0 , kus $\varphi(x)$ on pidev. Peame näitama, et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ et } |x - x_0| < \delta, |t| < \delta \Rightarrow |u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

Et $\varphi(x)$ on pidev punktis x_0 , siis $\exists \eta(\varepsilon) > 0$, et

$$|x - x_0| < \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Kujutame $u(x, t)$ summana

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{x_1} G\varphi d\xi + \int_{x_1}^{x_2} G\varphi d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t)$$

kus $x_1 = x_0 - \eta$ ja $x_2 = x_0 + \eta$. Pealiikme $u_2(x, t)$ jaoks saame

$$u_2(x, t) = \varphi(x_0) \int_{x_1}^{x_2} G[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)] d\xi = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \varphi(x_0) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = \varphi(x_0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x_2-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(x_0)$$

$$z = \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}, \quad dz = \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}}$$

$t \rightarrow 0$ korral saame Poissoni integraali $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ Seega $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, et

$$|x - x_0| < \delta_1, |t| \leq \delta_1 \Rightarrow |I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Näitame, et I_2 , u_1 ja u_3 lähenevad nullile, kui $x \rightarrow x_0$ ja $t \rightarrow 0$.

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{6} \int_{x_1}^{x_2} G(\xi) d\xi = \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{\frac{x_1-x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x_2-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz}_{<1} < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$|u_1(x, t)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} G\varphi d\xi \right| < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_2-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$$

$$|u_3(x, t)| = \left| \int_{x_2}^{+\infty} G\varphi d\xi \right| < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2-x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \rightarrow 0,$$

kui $x \rightarrow x_0$, $t \rightarrow 0$. Seega $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, et $|x - x_0| < \delta_2$, $|t| < \delta_2 \Rightarrow |u_1(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
 $|u_3(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ Järelikult

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leq |u_1 + (I_1 - \varphi(x_0)) + I_2 + u_3| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

kui $|x - x_0| < \delta$ ja $|t| < \delta$.

Kui algtingimus on antud punktis $t = t_0$, siis

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{t-t_0}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi) d\xi \quad (32.11')$$

Kui funktsioon $\varphi(x)$ on I liiki katkevuspunkt, siis $u(x, t)$ on kõikjal pidev välja arvatud $\varphi(x)$ katkevuskohad.

33 Elliptilised võrrandid

Elliptilist võrrandit võib vaadelda statsionaarse protsessina paraboolse võrrandi jaoks

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \left(a^2 = \frac{k}{C\rho} \right)$$

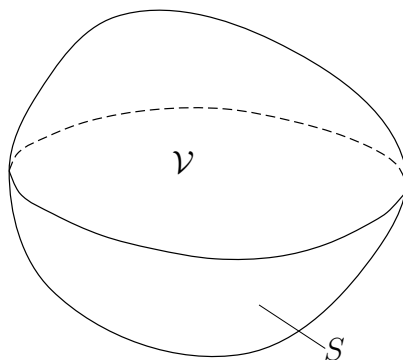
Statsionaarse protsessi korral u ei sõltu ajast ning

$$\Delta u = 0 \quad \text{Laplace' võrrand} \quad (33.1)$$

Kui on olemas soojusallikad, saame mittehomogeense võrrandi

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k} \quad (33.2)$$

kus F on soojusallikate tihedus, k soojusjuhtivus. Mittehomogeenset võrrandit nimetatakse sageli Poissoni võrrandiks. Vaatleme rajaülesandeid. Olgu \mathcal{V} piirkond 3-me mõõtmelises ruumis, mis on piiratud pinnaga S .



$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \mathcal{V}$$

Rajapinnal S :

- 1) $u = g(x, y, z)$ I rajaülesanne, Dirichlet ülesanne
- 2) $\frac{\partial u}{\partial n} = g(x, y, z)$ II rajaülesanne, Neumanni ülesanne
- 2) $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = g(x, y, z)$ III rajaülesanne

Näiteks vedelike potentsiaalse voolamise korral on vedelike kiirus \vec{v} potentsiaal φ gradient

$$\vec{v} = \text{grad}\varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}$$

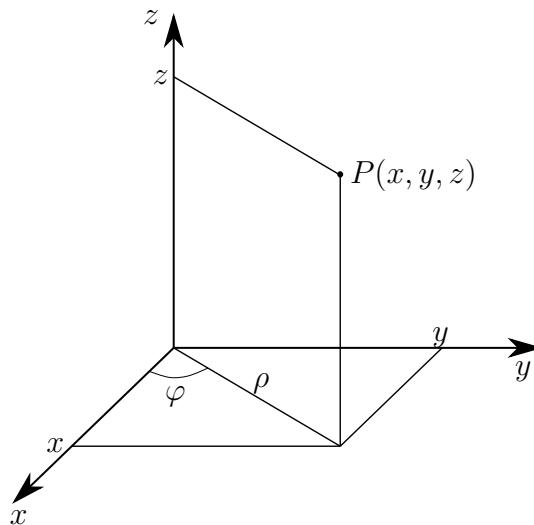
Kui puuduvad lätted (allikad) siis

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Seega $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$, ehk $\Delta\varphi = 0$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\Delta} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}, \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

Vaatame Laplace'i võrrandit silinderkordinaatides



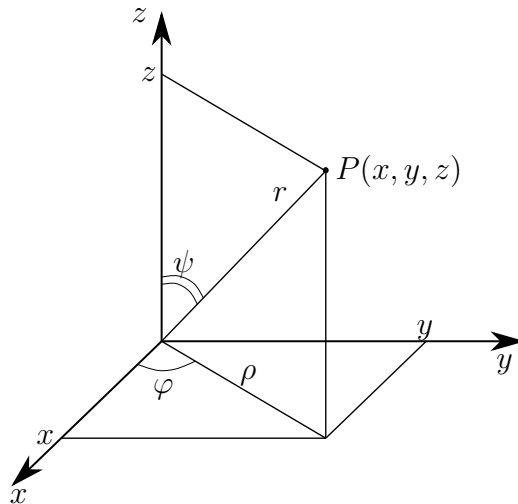
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{\rho}(\rho u_{\rho})_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz} \quad (33.3)$$

Sfäärilistes kordinaatides

$$\begin{cases} x = r \sin \psi \cos \varphi \\ y = r \sin \psi \sin \varphi \\ z = r \cos \psi \end{cases}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \psi}(\sin \psi u_{\psi})_{\psi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi}u_{\varphi\varphi} \quad (33.4)$$



34 Laplace'i võrrandi fundamentaallahendid

Vaatleme sfäärilise sümmeetriaga lahendit $u = u(r)$. See lahend ei sõltu nurkadest φ ja ψ ning rahuldab võrrandit

$$(r^2 u_r)_r = 0$$

mille integreerimisel saame

$$\begin{aligned} r^2 u_r &= -C_1 & u_r &= -\frac{C_1}{r^2} \\ u &= \frac{C_1}{r} + C_2 \end{aligned}$$

Kui $C_1 = 1$ ja $C_2 = 0$, siis saame

$$u = \frac{1}{r} \tag{34.1}$$

See on Laplace'i võrrandi fundamentaallahend 3-me mõõtmelises ruumis. Kahemõõtmelises ruumis saame leida ringsümmeetriaga lahendi $u = u(\rho)$

$$(\rho u_\rho)_\rho = 0$$

millest

$$\rho u_\rho = C_1, \quad u = C_1 \ln \rho + C_2$$

Võttes $C_1 = -1$ ja $C_2 = 0$, saame

$$u = \ln \frac{1}{\rho} \tag{34.2}$$

Laplace'i võrrandi fundamentaallahend tasapinnal. $u = \frac{1}{r}$ rahuldab Laplace'i võrrandit kõikjal välja arvatud nullpunktis $r = 0$, kus lahendil on singulaarsus (läheneb

lõpmatusel). See lahend langeb kokku, konstantse kordaja täpsusega punktlaengu e elektrivälja potentsiaaliga, mis on

$$u = \frac{e}{r}$$

Analoogiliselt rahuldab $u = \ln \frac{1}{\rho}$ Laplace'i võrrandit tasapinnal, välja arvatud punktis $\rho = 0$. See lahend langeb konstantse kordaja täpsusega kokku laetud sirgjoonilise juhi elektrivälja potentsiaaliga

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho}$$

kus e_1 on laengu tihedus pikkusühiku kohta.

35 Harmoonilised funktsioonid

Kahemõõtmelist Laplace'i võrrandit lahendatakse sageli kompleksmuutuja funktsioonide abil. Vaatleme analüütilisi kompleksmuutuja funktsioone

$$\begin{aligned} w = f(z) &= u(x, y) + iv(x, y), \\ z &= x + iy \end{aligned}$$

tuletisega

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Analüütilisuse piisavad ja tarvilikud tingimused on Cauchy-Riemanni tingimused

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (35.1)$$

Tingimuste tuletamine

$$\begin{aligned} w_x &= u_x + iv_x = f'(z)z_x = f'(z) \\ w_y &= u_y + iv_y = f'(z)z_y = if'(z) \\ iu_x - v_x &= u_y + iv_y \end{aligned}$$

Analüütilistel funktsioonidel on lõpmatu palju tuletisi ja neid saab esitada astmereana. Diferentseerides (35.1) esimest võrdust x järgi ja teist y järgi saame

$$u_{xx} = v_{xy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

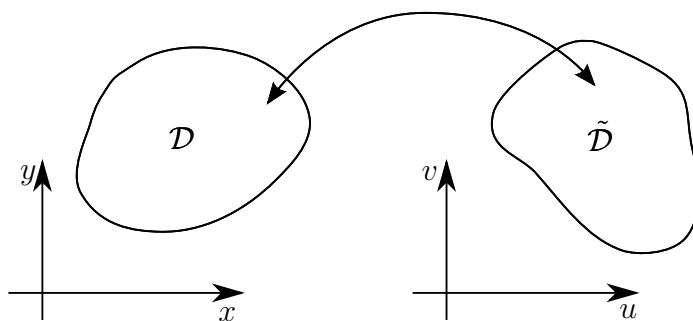
Seega

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \Delta u = 0$$

Analoogselt $\Delta v = 0$. Seega analüütilise funktsiooni reaali- ja imaginaarosa rahuldavad Laplace'i võrrandid. Neid funktsioone u ja v nimetatakse **harmoonilisteks kaasfunktsioonideks**. Vaatleme muutujate teisendust

$$\begin{cases} x = x(u, v) & u = u(x, y) \\ y = y(u, v) & v = v(x, y) \end{cases} \quad (35.2)$$

Mis teisendab piirkonna \mathcal{D} (x, y) tasandil piirkonnaks $\tilde{\mathcal{D}}$ (u, v) tasandil. Olgu $g(x, y)$



reaalne kaks korda diferentseeruv funktsioon. Vaatleme kuidas muutub selle funktsiooni Laplace'i operaator teisenduse (35.2) korral

$$g(x, y) = g[x(u, v); y(u, v)] = \tilde{g}(u, v)$$

Saame

$$\begin{aligned} g_x &= \tilde{g}_x u_x + \tilde{g}_v v_x; & g_y &= \tilde{g}_y u_y + \tilde{g}_v v_y \\ g_{xx} &= \tilde{g}_{uu} u_x^2 + 2\tilde{g}_{uv} u_x v_x + \tilde{g}_{vv} v_x^2 + \tilde{g}_u u_{xx} + \tilde{g}_v v_{xx} \\ g_{yy} &= \tilde{g}_{uu} u_y^2 + 2\tilde{g}_{uv} u_y v_y + \tilde{g}_{vv} v_y^2 + \tilde{g}_u u_{yy} + \tilde{g}_v v_{yy} \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \Delta g &= g_{xx} + g_{yy} = \\ &\tilde{g}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + 2\tilde{g}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{g}_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \tilde{g}_u(u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{g}_v(v_{xx} + v_{yy}) \end{aligned} \quad (35.3)$$

Kui u ja v on harmoonilised, siis on teisendus (35.2) ekvivalentne teisendusele, mis on tehtud analüütilise funktsiooniga

$$u = f(z) = u + iv$$

Couchy-Riemanni tingimusest leiame

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= u_x^2 + v_x^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2 \\ u_x v_x + u_y v_y &= 0 \end{aligned}$$

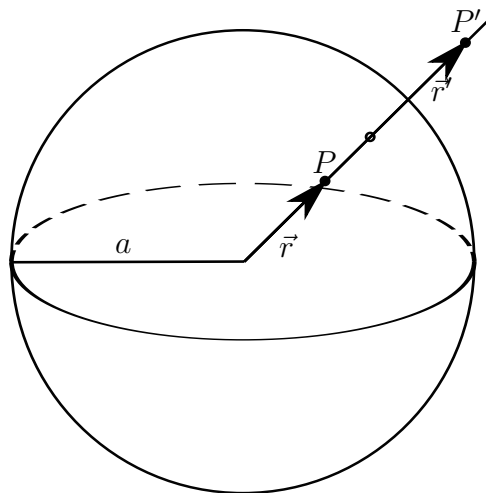
Saame (35.3) kirjutada kujul

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} &= (\tilde{g}_{uu} + \tilde{g}_{vv})|f'(z)|^2 \\ \text{ehk } \Delta g(x, y) &= \Delta \tilde{g}(u, v)|f'(z)|^2 \end{aligned} \quad (35.4)$$

Järelikult analüütilise funktsiooni poolt tehtava teisenduse korral läheb harmooniline funktsioon $g(x, y)$ piirkonnas \mathcal{D} üle harmooniliseks funktsiooniks $\tilde{g}(u, v)$ piirkonnas $\tilde{\mathcal{D}}$ ja vastupidi.

36 Raadiusvektorite teisendus

Olgu meil kera raadiusega a . Punktile P raadiusvektoriga \vec{r} seatakse vastavusse punkt



P' raadiusvektoriga \vec{r}' . Kusjuures

$$r r' = a^2, \quad r' = \frac{a^2}{r} \quad (36.1)$$

Võtame $a = 1$. Näitame, et harmooniline funktsioon $u(\rho, \varphi)$ teisendub selle teisenduse korral harmooniliseks funktsiooniks $\tilde{u}(\rho', \varphi)$

$$u(\rho, \varphi) = \tilde{u}(\rho', \varphi), \quad \text{kus } \rho' = \frac{1}{\rho} \quad (36.2)$$

Sel juhul

$$\rho^2 \Delta u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) + u_{\varphi\varphi} = 0$$

Saame

$$\rho u_\rho = \rho \tilde{u}_\rho \frac{d\rho'}{d\rho} = \rho \tilde{u}_{\rho'} \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \tilde{u}_{\rho'} = -\rho' \tilde{u}_{\rho'}$$

Seega

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\rho) &= \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (-\rho' \tilde{u}_{\rho'}) = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} (\rho' \tilde{u}_{\rho'}) \\ (\rho')^2 \Delta \tilde{u} &= \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'} (\rho' \tilde{u}_{\rho'}) + \tilde{u}_{\varphi\varphi} = \rho^2 \Delta u = 0 \end{aligned}$$

Ka kolme muutuja korral saame sama tulemuse. Sel juhul

$$ru(r, \varphi, \psi) = u(r', \tilde{\varphi}, \psi), \quad r' = \frac{1}{r} \quad (36.3)$$

ja

$$\Delta u(r, \varphi, \psi) = 0 \iff \Delta \tilde{u}(r', \varphi, \psi) = 0$$

37 Greeni valemid

Olgu \mathcal{V} piirkond kolmemõõtmelises ruumis, mis on piiratud pinnaga S . Kehtib Gaussi valem (Gauss-Ostrogradski valem)

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \iint_S Z \cos \gamma d\sigma \quad (37.1)$$

kus $\gamma = (\widehat{\vec{n}, z})$. Üldisemalt

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv = \iint_S (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) d\sigma \quad (37.2)$$

kus $\alpha = (\widehat{\vec{n}, x})$, $\beta = (\widehat{\vec{n}, y})$. Kui vaadelda vektorvälja $\vec{F} = \{X, Y, Z\}$, siis saame

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F} dv = \iint_S F_n d\sigma = \iint_S \vec{F} \vec{d}\sigma \quad (37.2')$$

kus $F_n = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$, normaali \vec{n} -suunaline \vec{F} komponent, $\vec{d}\sigma = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} d\sigma = \vec{n} d\sigma$, \vec{n} -normaali ühikvektor.

Võttes

$$X = uv_x, \quad Y = uv_y, \quad Z = uv_z$$

Saame

$$\operatorname{div} \vec{F} = u \cdot \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$$

kus $\operatorname{grad} u = \{u_x, u_y, u_z\}$ ja $\operatorname{grad} v = \{v_x, v_y, v_z\}$. Siis (37.2') annab esimese Greeni valemi

$$\iiint_{\mathcal{V}} u \cdot \Delta v dv = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dv \quad (37.3)$$

vahetades u ja v saame

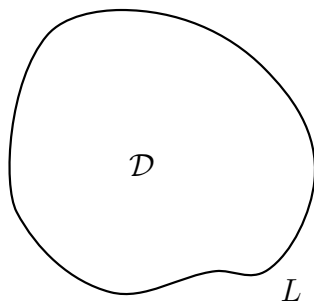
$$\iiint_{\mathcal{V}} v \cdot \Delta u dv = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dv \quad (37.3')$$

Lahutades (37.3)-st (37.3')-ja saame Greeni valemi põhikuju.

$$\iiint_{\mathcal{V}} (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dv = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \quad (37.4)$$

See valem kehtib ka siis, kui \mathcal{V} on piiratud mitme pinnaga.

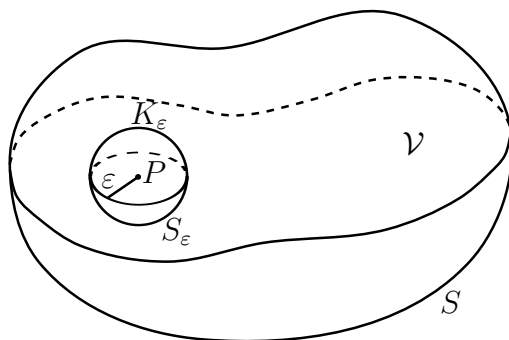
Kahemõõtmelises ruumis saajme Greeni valemi kujul



$$\iint_{\mathcal{D}} (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dx dy = \oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (37.4')$$

$v = \frac{1}{r}$, kus r on kaugus fikseeritud punktist $P(x_0, y_0, z_0)$ on Laplace'i võrrandi fundamentaallahend ja seega harmooniline funktsioon.

Vaatleme piirkonda \mathcal{V} , mis sisaldab punkti P . Võtame punkti P ümber väikese kera K_ε , mis on täielikult piirkonnas \mathcal{V} . Siis piirkonnas $\mathcal{V} \setminus K_\varepsilon = \tilde{\mathcal{V}}$ on \mathcal{V} pidev ja diferentseeruv ning me saame kasutada Greeni valemit



$$\begin{aligned} \iiint_{\tilde{V}} \left(u \Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta u \right) dv &= \iint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \\ &\iint_{S_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (37.5)$$

Sfäärilisel pinnal S_ε saame

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{S_\varepsilon} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{r^2} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} \\ \iint_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} u d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 \cdot u \Big|_Q = 4\pi u^* \end{aligned}$$

kus $u^* = u \Big|_Q$ on u väärtus pinna S_ε teatud punktis Q (keskmine väärtus). Integraali teise osa jaoks saame

$$\iint_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* \cdot \varepsilon$$

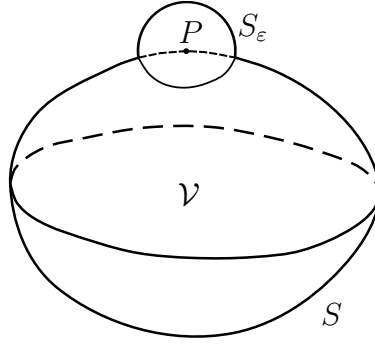
Läheme üle piirväärtusele, kui $\varepsilon \rightarrow 0$. Siis

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* &= u \Big|_P = u(x_0, y_0, z_0) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* \cdot \varepsilon &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\tilde{V}} \left(-\frac{1}{r} \Delta u \right) dx &= \iiint_V \left(-\frac{1}{r} \Delta u \right) dx \end{aligned}$$

Me saame

$$4\pi u \Big|_P = - \iint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma - \iiint_V \frac{1}{r} \Delta u dv \quad (37.6)$$

Kui punkt P oleks olnud väljaspool piirkonda \mathcal{V} , siis $v = \frac{1}{r}$ on kõikjal pidev ja harmooniline ja vasakul pool (37.6) saame 0.



Kui punkt P asub pinnal S , siis vaid osa sfäärist S_ε jääb piirkonna \mathcal{V} sisse, kasutades Greeni valemit ja minnes üle piirväärtusele $\varepsilon \rightarrow 0$, saame, et S_ε pindalast tuleb võtta vaid pool, ehk $2\pi\varepsilon^2$. Seega valemis (37.6) vasakul pool tuleb kordaja 2π .

$$ku|_P = \iint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} \Delta u dv \quad (37.7)$$

$$k = \begin{cases} 4\pi, & \text{kui } P \in \mathcal{V} \\ 2\pi, & \text{kui } P \in S \\ 0, & \text{kui } P \notin \mathcal{V} \end{cases}$$

Kui u on harmooniline, siis $\Delta u = 0$ ja

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma \quad (37.8)$$

kus $r = PM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$; $M(x, y, z) \in S$. Seega harmoonilise funktsiooni väärtused piirkonnas \mathcal{V} on määratud selle funktsiooni ja ta normaalväärtustega pinnal S .

Analoogselt saame tasapinnal, võttes $v = \ln \frac{1}{\rho}$, $\rho = PM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$$ku(x_0, y_0) = \oint_L \left[\ln \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right) \right] d\sigma - \iint_{\mathcal{D}} \ln \frac{1}{\rho} \Delta u dx dy \quad (37.9)$$

$$k = \begin{cases} 2\pi, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \\ \pi, & \text{kui } P \in L \\ 0, & \text{kui } P \notin \mathcal{D} \end{cases}$$

Kui u on harmooniline, siis

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \left[\ln \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right) \right] dS \quad (37.10)$$

38 Harmoonilise funktsiooni omadused

1. Kui funktsioon u on harmooniline piirkonnas \mathcal{V} , siis kehtib valem

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 \quad (38.1)$$

kus S on suvaline kinnine pind piirkonna \mathcal{V} sees. Tõepoolest, võttes Greeni esimeses valemis $v \equiv 1$ ja u harmoonilise funktsiooni ($\Delta u = 0$) saamegi (38.1).

Valemist (38.1) järeldub, et teisel rajaülesandel

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & (x, y, z) \in \mathcal{V} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, & (x, y, z) \in S \end{aligned}$$

saab lahend eksisteerida vaid juhul, kui

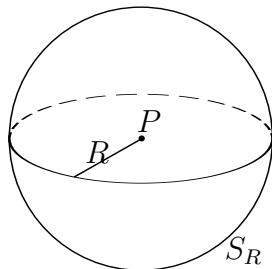
$$\iint_S g d\sigma = 0$$

Seda tingimust võib tõlgendada, kui allikate puudumist harmoonilise funktsiooni jaoks.

2. Kui funktsioon u on harmooniline piirkonnas \mathcal{V} ja $P(x_0, y_0, z_0)$ on mingi punkt selles piirkonnas, siis kehtib valem

$$u|_P = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u d\sigma \quad (38.2)$$

kus S_R on sfäär raadiusega R , keskpunktiga P , mis asetseb täielikult piirkonnas \mathcal{V} . Valemit (38.2) nimetatakse keskvaartusteoreemiks. Kasutame valemit (37.8)



keraga K_R jaoks, mille keskpunkt on P ja raadius R .

$$u|_P = \iint_{S_R} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma$$

Sfääril S_R saame $\frac{1}{r} = \frac{1}{R}$, $\iint_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$ ja $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \Big|_{S_R} = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{R^2}$. Järelikult kehtib valem (38.2). See valem kehtib suvalise sfääri S_ρ jaoks, mis on täielikult piirkonna \mathcal{V} . Seega

$$u \Big|_P = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u d\sigma$$

integreerides ρ järgi 0-st R -ni saame

$$u \Big|_P \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \left[\iint_{S_\rho} u d\sigma \right] d\rho$$

$$u \Big|_P \frac{R^3}{3} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{K_R} u dv$$

Saame

$$u \Big|_P = \frac{1}{V_r} \iiint_{K_r} u dv \quad (38.3)$$

kus $V_R = \frac{4}{3}\pi R^3$. Ka see on keskvaärtusteoreem.

Kahemõõtmelisel juhul saame

$$u \Big|_P = \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_R} u dS \quad (38.2')$$

kus C_R on ringjoon raadiusega R ja

$$u \Big|_P = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{S_R} u dx dy \quad (38.3')$$

kus S_R on ring raadiusega R .

Teoreem 38.1. *Maksimumprintsip. Kui funktsioon u on pidev kinnise pinna piirkonnas $\bar{\mathcal{V}}$ ($\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V} + S$) ja rahuldab Laplace'i võrrandit $\Delta u = 0$ (harmooniline) piirkonnas \mathcal{V} , siis see funktsioon saavutab oma suurima (vähima) väärtuse rajapinnal S .*

Tõestus. Oletame, et u -l on maksimum mingis punktis P , mis asub \mathcal{V} sees ja seega

$$u_0 = u \Big|_P \geq u(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathcal{V}$$

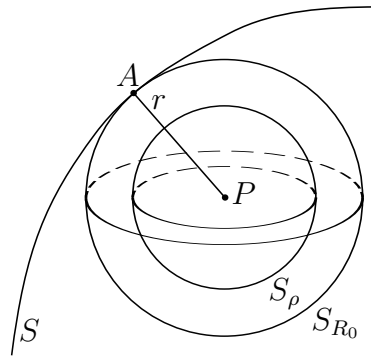
Võtame sfääri S_ρ keskpunktiga P , mis asub tervenisti \mathcal{V} -s, siis

$$u \Big|_{S_\rho} \leq u \Big|_P = u_0$$

keskväärtusteoreemi kohaselt

$$u_0 = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u d\sigma \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u_0 d\sigma = u_0$$

Kui kasvõi üheski S_ρ punktis u väärtus oleks väiksem u_0 -st $u|_Q < u_0$, siis $\frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho} u d\sigma < u_0$, mis viib vasturääkivusele. Järelikult kogu sfääri S_ρ pinnal $u|_{S_\rho} \equiv 0$. Olgu r_0 punkti P vähim kaugus \mathcal{V} rajapinnast S . Sel juhul $u \equiv u_0$ kõigis kera K_{r_0} sisemistes punktides



ja ka sfääri S_{r_0} ning pinna S puutepunktis A tänu u pidevusele

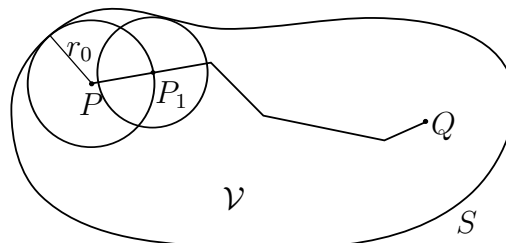
$$u|_A = u|_P = u_0$$

□

See tõestaski teoreemi, sest A asub pinnal S . Analoogselt saab tõestada ka miinimumi korral

Järeldused

1. Kui sidusa piirkonna \mathcal{V} korral u saavutab maksimumi mingis sisemises punktis P , siis see funktsioon on konstantne kogu piirkonnas \mathcal{V} .



Olgu u ja v harmoonilised \mathcal{V} -s ja pidevad kinnises piirkonnas $\bar{\mathcal{V}}$.

$$2. \quad u \leq v \quad (x, y, z) \in S \implies u \leq v, \quad (x, y, z) \in \mathcal{V}$$

$$3. \quad |u| \leq v \quad (x, y, z) \in S \implies |u| \leq v, \quad (x, y, z) \in \mathcal{V}$$

$$4. \quad |u| \leq \max_{P \in S} |u|_P \quad u \text{ on harmooniline } \mathcal{V}\text{-s}$$

Teoreem 38.2. (*I rajaülesande ühesus*). Olgu u järgmise ülesande lahend

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & P \in \mathcal{V} \\ u = g, & P \in S \end{cases} \quad P = (x, y, z) \quad (38.4)$$

kusjuures u on pidev kinnises piirkonnas $\bar{\mathcal{V}}$. Sel juhul u on ühene.

Tõestus. Olgu ülesandel (38.4) kaks erinevat lahendit u ja v . Siis $w = u - v$ on järgmise ülesande lahend

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0, & P \in \mathcal{V} \\ w &= 0, & P \in S \end{aligned}$$

Vastavalt maksimumprintsibile saame

$$|w| \leq 0 \quad \text{ehk } w \equiv 0 \quad \text{järelikult } u \equiv v$$

□

Viited

- [1] Partial Diferential Equations for Scientists and Engineers, Stanley J. Farlow, Dover Publications inc., New York