FÜÜSIKALISTE SUURUSTE MÕÕTMINE. MÕÕTMISVEAD, MÕÕTEHÄLBED JA MÕÕTEMÄÄRAMATUS FÜÜSIKA PRAKTIKUMIDES

1. Füüsikaliste suuruste mõõtmine

Mõõtmiseks nimetatakse antud füüsikalise suuruse võrdlemist teise sama liiki suurusega, mis on võetud mõõtühikuks. Mõõtetulemus on mõõtmise teel saadud mõõtesuuruse väärtus, mis koosneb mõõtarvust (arvväärtusest) ja vastavast mõõtühikust. Mõõtetulemuse täielik esitus peab sisaldama informatsiooni mõõtemääramatuse kohta. Määramatus (ebakindlus) mõõtmistes tekib nii mõõdetava objekti kui selle mõõtmise olemuslikust ebatäiuslikkusest (ligikaudsusest). Esialgu võtame teadmiseks, et mõõtemääramatus on mõõtetulemuse kui juhusliku suuruse hajuvust iseloomustav parameeter, mis piiritleb vahemiku, kuhu mõõdetava suuruse väärtushulk usutavasti satub. Tavaliselt on määramatuse arvuliseks väärtuseks selle vahemiku poollaius. Põhjalikumalt käsitletakse mõõtemääramatust allpool. Lisame, et Eestis peab mõõtmisalane tegevus olema kooskõlas Eesti Vabariigi mõõteseadusega.

Lihtsaim mõõtmine on otsemõõtmine. Sel korral leitakse mõõtarv otse mõõteinstrumendi skaalalt viida (osuti) asukoha järgi või registreeritakse instrumendi näidikul asuv arv (digitaalmõõteriistade korral). Otsemõõtmise üksiktulemust nimetatakse mõõdiseks.

Kaudsel mõõtmisel leitakse mõõtarv valemi abil otseselt mõõdetud suuruste kaudu.

2. Mõõtmisvead ja mõõtehälbed

Absoluutseks veaks α_0 nimetatakse mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse X vahet:

$$\alpha_0 = x - X \ .$$

Suuruse tõelise väärtuse võiks kätte saada ainult absoluutselt täiuslikul mõõtmisel, mis pole reaalselt teostatav. Seega on tõeline väärtus ja ka absoluutne viga teoreetilised mõisted, mida praktikas kasutada ei saa.

Relatiivseks ehk suhteliseks veaks δ_0 nimetatakse absoluutse vea ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse suhet:

$$\delta_0 = \frac{\alpha_0}{X} \ .$$

Ülalöeldust tuleneb, et ka relatiivne viga on teoreetiline mõiste.

Kuna mõõdetava suuruse tõelist väärtust X pole põhimõtteliselt võimalik teada saada (parimal juhul on teada nn leppeväärtus e tegelik väärtus, mis on parimate vahendite ja metoodikaga leitud mõõtesuuruse väärtuse hinnang), siis mõõtmisvigade asemel räägitakse praktikas mõõtevea hinnangutest e mõõtehälvetest.

Hälbeks nimetatakse mõõtetulemuse ja valitud tugiväärtuse vahet. Tavaliselt on tugiväärtuseks kas aritmeetiline keskmine või leppeväärtus. Mõõdis miinus mõõdiste aritmeetiline keskmine annab juhusliku mõõtehälbe. Selle käitumine on juhuslik. Mõõdiste aritmeetiline keskmine miinus leppeväärtus annab süstemaatilise mõõtehälbe. See on kas püsiv või seaduspäraselt muutuv kõrvalekalle mõõtesuuruse tegelikust väärtusest. Mõõdise (üldiselt mõõtetulemuse) mõõtehälve on juhusliku ja süstemaatilise mõõtehälbe algebraline summa. Kuna mõõtehälve loetakse mõõtevea hinnanguks, siis tähistatakse teda tähega *e*, mis tuleneb ingliskeelsest sõnast *error*. Eestpoolt järeldub mõõtehälbe üldine definitsioon mõõtetulemuse ja leppeväärtuse vahena:

$$e = x - x_l \ ,$$

kus x on mõõtmistulemus ja x_l mõõdetava suuruse leppeväärtus.

Niisiis erineb mõõtehälve kui praktiline mõiste mõõteveast kui teoreetilisest mõistest selle poolest, et esimesel juhul leitakse mõõtetulemuse kõrvalekalle teadaolevast või määratavast leppeväärtusest, teisel juhul (tundmatust) tõelisest väärtusest.

Kuna tavaliste mõõtmiste juures pole mõõdetava suuruse leppeväärtus teada, siis seal mõõtehälbe konkreetset suurust, rangelt võttes, hinnata ei saa. Küll saab mõõtmisi korrates leida juhuslikud mõõtehälbed. Juhul, kui mõõdetava suuruse leppeväärtus aga teada on (näiteks teatmikust leitud vastava suuruse väärtusena), saab hinnata nii mõõtetulemuse määramatust (ainult katseandmete põhjal) kui mõõtehälvet. Ka on võimalik mõõtevahendite teadaolevate metroloogiliste karakteristikute, näiteks täpsusklassi järgi leida suurim lubatud näiduhälve (lubatud piirhälve), s.o näidu maksimaalne kõrvalekalle tegelikust e leppeväärtusest. Näiduhälve on mõõtehälbe erijuht.

Süstemaatilised mõõtehälbed jaotatakse üldiselt kolme liiki:

a) tuntud olemuse ja määratava suurusega süstemaatilised mõõtehälbed (nihutatud skaala või kõver osuti, temperatuuri muutusest tingitud hälve jne), mis tulevad paranditena mõõtetulemustesse sisse viia enne tulemuste edasist töötlemist;

b) tuntud päritoluga, kuid tundmatu suurusega süstemaatilised mõõtehälbed, milleks kõige sagedamini on mõõtevahendi näiduhälve. Kuigi mõõtevahendi metroloogiliste karakteristikute järgi on kergesti arvutatav näiduhälbe maksimaalsuurus e lubatud piirhälve, jääb konkreetse näidu hälve tundmatuks. Lubatud piirhälbe, s.o suurima lubatud näiduhälbe järgi jaotatakse mõõtevahendid täpsusklassidesse. Neist tuleb juttu edaspidi.

c) süstemaatilised mõõtehälbed, mille olemasolust ei olda teadlikud. Need on kõige ohtlikumad, kuna nihutavad mõõtetulemuse õigest väärtusest kõrvale mõõtja teadmata.

Ekseteks ehk jämedateks mõõtehälveteks nimetatakse vilumatusest, tähelepanematusest, lühiajalistest kõrvalmõjudest ja muudest asjaoludest tingitud olulisi kõrvalekaldeid ülejäänud mõõtetulemustest. Tavaliselt on eksed avastatavad ja parandatavad, kui mõõtmisi korratakse.

3. Mõõtemääramatus

3.1. Põhiseisukohad

Lähtudes rahvusvahelisest normdokumendist “Guide to the expression of uncertainty in measurement” (ISO, Geneva, 1993) ja Eestis kehtivast mõõteseadusest ning standardist (EVS 758:1998 “Metroloogia. Terminid ja määratlused”), tuleb iga mõõtetulemuse kvaliteeti hinnata mõõtemääramatuse kontseptsiooni alusel. Selle järgi pole põhimõtteliselt võimalik ühtki objekti absoluutselt täpselt mõõta. Veel enamgi, ka objekt ise jääb alati mingil määral ligikaudseks, hajusaks. Väärtuste hajuvust saab iseloomustada tõenäosusjaotusega. Määramatuse kontseptsiooni järgi ongi mõõtmise eesmärgiks mõõdetava objekti tõenäosusjaotust iseloomustavate parameetrite usaldatav hindamine. Nende parameetrite all mõeldakse kõige sagedamini keskväärtust ja standardhälvet.

Selles kogumikus kasutatakse mõõtemääramatuse sünonüümina määramatust.

Selgitame nüüd määramatust veidi põhjalikumalt. Kõige üldisemalt tähendab mõõtemääramatus kahtlust mõõtetulemuse kehtivuses, õigsuses. Seda kahtlust peab oskama kvantitatiivselt hinnata. Määramatuse arvuliseks hindamiseks tuleb vastata kahele põhiküsimusele:

1) millistes konkreetsetes piirides mõõtetulemuse ümber võiks mõõdetava suuruse väärtushulk paikneda?
2) millise kindlusastmega (tõenäosusega) ta neis piirides asuda võiks?

Nii mõõtetulemust kui ka mõõdetavat objekti (näiteks varda pikkust) käsitletakse siin juhusliku suurusena. Juhuslikku suurust iseloomustab peale arvväärtuste hulga aga veel nende jaotumine tõenäosuste järgi. Viimane võimaldab hinnata juhusliku suuruse hajuvust, st vahemikku, mille piiride vahele juhusliku suuruse väärtused teatud tõenäosusega satuvad.

Konkreetsemalt ongi mõõtemääramatus mõõtetulemuse ja selle kaudu mõõteobjekti tõenäosusjaotuse hajuvust iseloomustav parameeter. Mida täpsemad on mõõtmised, mida enam on parandite sisseviimisega vähendatud süstemaatilist mõõtehälvet, seda lähemal on mõõtetulemuse määramatus mõõteobjekti määramatusele.

Mõõteseaduse kohaselt on mõõtemääramatuse definitsioon järgmine: mõõtemääramatus on mõõtetulemusega seonduv parameeter, mis iseloomustab mõõtesuurusele põhjendatult omistatavate väärtuste tõenäosusjaotust. Sellise definitsiooni korral peavad aga mõõtmised olema tehtud peaaegu ideaalse täpsusega, et mõõtetulemuse tõenäosusjaotus oleks võimalikult lähedane mõõdetava suuruse tõenäosusjaotusele ja tulemuse hajuvust iseloomustav parameeter vastaks seega mõõdetava suuruse väärtuste tegelikule hajuvusele (oleks selle hajuvuse parimaks hinnanguks).

Füüsika üldpraktikumis nii kõrge täpsusega mõõtmisi ei tehta. Seetõttu saab siin rääkida mõõtetulemuse laiema tähendusega määramatusest, mida tekitavad mõlemad: nii mõõdetav objekt kui selle mõõtmine. Objekti määramatusele lisandub olulisena selle mõõtmisest tingitud määramatus. Reaalselt pole nad eristatavad. Mõõtetulemuse (kogu)määramatus on nende koosmõju tulemus.

Tõenäosusteooria järgi näitab hajuvust dispersioon. Positiivset ruutjuurt dispersioonist nimetatakse standardhälbeks. Standardhälve, selle kordne või siis antud tõenäosusega usaldusvahemiku poollaius on tavaliselt nendeks parameetriteks, millega mõõtetulemuse hajuvust iseloomustatakse ja mis seega mõõtemääramatust väljendavad.

Neid parameetreid saab statistiliste võtetega hinnata. Statistilises mõttes moodustab mõõdiste kogum valimi. Selle baasil leitakse mõõdiste või nende aritmeetilise keskmise hajuvust iseloomustava parameetri, standardhälbe hinnang – eksperimentaalne standardhälve. Kui sellele vastav tõenäosus on teada ja mõõdiste jaotus on sümmeetriline, siis on standardhälve ühtlasi talle vastava usaldusvahemiku poollaius. Etteantud, standardhälbest suurema tõenäosusega usaldusvahemiku poollaiuse moodustamiseks korrutatakse standardhälvet vastavast tõenäosusjaotusest tuleneva koefitsiendiga, mida nimetatakse katteteguriks.

Nii eksperimentaalne standardhälve kui selle kordne väljendavad määramatuse absoluutsuurust, kuid sellest ei piisa mõõtmiste headuse iseloomustamiseks.

Mõõtmiste kvaliteedi sobiv iseloomustaja on aga määramatuse absoluutsuuruse ja mõõtetulemuse suhe, mida nimetatakse suhtelise vea eeskujul suhteliseks mõõtemääramatuseks. Ta näitab, millise osa moodustab määramatus mõõtetulemusest.

3.2. Mõõtemääramatuse klassifitseerimine tüüpideks ja liikideks

Erinevatest allikatest pärit info töötlemise viisist tulenevalt hinnatakse mõõtemääramatust, s.o mõõtetulemuse hajuvust kahte moodi: A- ja B-tüüpi hindamismeetodiga. Kasutatud hindamismeetodi järgi jaotataksegi mõõtemääramatus tüüpideks. A-tüüpi hindamismeetodil leitud määramatust nimetatakse A-tüüpi määramatuseks ja B-tüüpi hindamismeetodil leitud määramatust B-tüüpi määramatuseks.

A-tüüpi hindamismeetodiks on eksperimendi käigus tehtud kordusmõõtmiste statistiline analüüs. A-tüüpi määramatuse näiteks on eksperimentaalne standardhälve.

B-tüüpi hindamismeetodi korral on lähteinfo mujalt pärit (mitte aktuaalsetest kordusmõõtmistest) ja selle teabe alusel hinnatakse määramatust teisiti kui A-tüübi puhul. Niisiis, B-tüüpi hindamismeetod ei ole seotud mõõteseeria praktilise statistilise analüüsiga. B-tüüpi määramatust hinnatakse kogemuslikult, teoreetiliselt või muul viisil, lähtudes eeldatavast tõenäosusjaotusest.

B-tüüpi määramatuse näiteks on mõõtevahendi passist pärit suurima lubatud näiduhälbe e piirhälbe alusel tehtud määramatuse hinnang, näiteks standardhälbe kujul, eeldades mingit näiduhälbe tõenäosusjaotust.

Vajab rõhutamist, et mõlemad hindamismeetodid põhinevad tõenäosusjaotusel ja mõlemal meetodil saadud määramatuse komponendid leitakse selle jaotuse parameetritena (näiteks standardhälbe hinnangutena), st mõlemad komponendid on juhuslike suuruste hajuvust iseloomustavad arvkarakteristikud, mis on vaid hinnatud erineval viisil.

Peale kahte suurde tüüpi jaotamise klassifitseeritakse mõõtemääramatust veel olenevalt sellest, kas tema hindamiseks kasutatakse standardhälvet või selle kordset või siis kindla tõenäosusega usaldusvahemiku poollaiust. Sel korral saadakse järgmised mõõtemääramatuse liigid:

a) Kui hinnatavaks parameetriks on standardhälve, siis saame standardmääramatuse.
b) Kui hinnatavaks parameetriks on standardhälbe kordne või kindla, küllalt suure tõenäosusega usaldusvahemiku poollaius, siis saame laiendmääramatuse. Kui kasutatakse usaldusvahemikku, siis tuleb kindlasti näidata, millisele usaldusnivoole (tõenäosusele) ta vastab. Usaldusvahemik kujutab endast konkreetsete usalduspiiridega kehtestatud vahemikku mõõtetulemuse ümber, kuhu usaldusnivooga määratud tõenäosusega usutavasti satub mõõdetava suuruse tegelik väärtus.

Üldiselt on mõõtetulemuse määramatusel palju erinevaid, mõõtmistega seotud allikaid. Vaatleme nüüd määramatust nende seisukohast. Määramatust tekitavad ja seega mõõtetulemust hajutavad nii mõõdetav objekt kui mõõtevahendid, mõõtemeetod, mõõteprotseduur ja mõõtetingimused ning kõik teised häirivad faktorid, sh mõõtja ise. Kui tegu on kaudse mõõtmisega, siis mõjutavad tulemuse määramatust nii üksiksuuruste mõõtmistulemused kui nende määramatused.

Määramatuse allikate rohkusest tulenevalt võib sel olla palju komponente ehk osamääramatusi. Kui kõik komponendid on leitud standardmääramatuse kujul, siis nende koosmõju iseloomustab kogumääramatus, mida nimetatakse liit(standard)määramatuseks. Viimast katteteguriga korrutades saame ülaltoodud määratluse järgi laiendliitmääramatuse e lihtsalt laiendmääramatuse. Kattetegur, nagu eespool öeldud, on kindlale tõenäosusele vastav koefitsient. Katteteguri väärtus sõltub tõenäosusjaotusest.

Ülalnimetatud määramatuse liikidest võib igaüks olla kas ainult A- või B-tüüpi määramatus või siis nende kombinatsioon.

Vaatleme nüüd lähemalt, kuidas leitakse liitmääramatus kaudse mõõtmise korral. Väljundsuuruse (kaudselt mõõdetud suuruse) liitmääramatus kujuneb mitme sisendsuuruse (otseselt mõõdetud suuruse) standardmääramatuse koosmõjul. Ta on võrdne positiivse ruutjuurega summast, mille liikmed on sisendsuuruste dispersioonid või kahekordsed kovariatsioonid ja mida liitmisel kaalutakse vastavalt sellele, kuidas mõõtetulemus muutub sõltuvalt sisendsuuruste väärtuste muutumisest. Dispersioonide kaaludeks on seejuures vastavate tundlikkustegurite ruudud ja kahekordsete kovariatsioonide kaaludeks vastavate tundlikkustegurite korrutised. (Kovariatsioon iseloomustab sisendsuuruste omavahelist sõltuvust. Sõltumatute sisendsuuruste korral võrdub kovariatsioon nulliga.) Tundlikkusteguriteks on osatuletised, mis leitakse väljundsuurust kirjeldavast mitme muutuja funktsioonist. (Põhjalikum käsitlus on esitatud allpool.)

Liitmääramatus on definitsiooni järgi standardmääramatus. Tema usaldusnivoo on aga üldjuhul teadmata. Liitmääramatuse põhjal sobiva usaldusnivooga laiendmääramatuse leidmiseks tuleks kõigepealt kindlaks teha või põhjendatult eeldada liitmääramatusega iseloomustatava juhusliku suuruse tõenäosusjaotus, mis teoreetiliselt kujutab endast osamääramatustega iseloomustatavate juhuslike suuruste tõenäosusjaotuste ühendjaotust (konvolutsiooni). Kui liitmääramatusega iseloomustatav tõenäosusjaotus on leitud või ollakse küllalt kindlad eeldatavas tõenäosusjaotuses, siis on võimalik vastava katteteguri abil liitmääramatuse usaldusvahemikku suurendada ja sel viisil sobiva tõenäosusega laiendmääramatus leida. Siin tuleb jällegi rõhutada, et katteteguri suurus sõltub tõenäosusjaotuse iseloomust. Sageli eeldatakse, lähtudes tsentraalsest piirteoreemist, et liitmääramatusega iseloomustatav tõenäosusjaotus on ligikaudu normaaljaotus. Sel korral võib kattetegurina kasutada normaaljaotusest tulenevat tegurit.

Kuna juhuslike suuruste tõenäosusjaotuste ühendjaotuse leidmine on matemaatiliselt üsna keerukas ja sageli pole piisavalt teavet ühendjaotust moodustavate osajaotuste kohta, siis leitakse füüsika praktikumis mitme argumendi funktsiooni (kaudselt mõõdetud suuruse) laiendmääramatus ja selle usaldusnivoo traditsioonilisel viisil ligikaudselt.

Kõigepealt viiakse kõik määramatuse komponendid neid vastavate katteteguritega korrutades ühele ja samale usaldusnivoole, st leitakse vastavad laiendatud osamääramatused. Siis korrutatakse need läbi tundlikkusteguritega ja seejärel summeeritakse ruutu tõstetud korrutised. Kui üksiksuuruste vahel sõltuvust pole, siis leitakse sellest summast ruutjuur. Saadud tulemuse, laiendliitmääramatuse usaldusnivoo loetakse võrdseks osamääramatuste usaldusnivooga. Kui sisendsuuruste vahel esineb sõltuvus, siis lisanduvad ülalnimetatud summale seda sõltuvust arvestavad liidetavad, millest räägitakse edaspidi.

Kui on vaja hinnata otsese mõõtmise tulemuse laiendatud liitmääramatust, siis toimitakse ülaltooduga analoogiliselt. Laiendatud osamääramatused saadakse standardsete osamääramatuste korrutamise teel ühele ja samale usaldusnivoole vastavate koefitsientidega. Laiendatud liitmääramatus leitakse ruutjuurena laiendatud osamääramatuste ruutude summast, eeldades osamääramatuste sõltumatust. Seejuures loetakse laiendatud liitmääramatuse usaldusnivoo võrdseks laiendatud osamääramatuste usaldusnivooga. Rõhutame siin veelkord, et see on laiendatud liitmääramatuse ligikaudse hindamise viis.

Füüsika praktikumis on üksikmääramatuste hindamise “täpsus” suhteliselt madal (~20%), mis on arvuliseks õigustuseks ülalesitatud laiendliitmääramatuse leidmise ligikaudsele viisile.

Mõõtemääramatuse allikaid lühidalt kokku võttes peame meeles, et lisaks mõõdetavale objektile tekitab määramatuse ka selle mõõtmine ning peale selle iga mõõtmisi häiriv tegur, mille konkreetne mõju mõõtmistulemusele pole teada. Kõik, mis jääb ebamääraseks, moodustab määramatuse. (Juhul, kui häiriva teguri mõju on piisavalt täpselt teada, saame ta põhimõtteliselt vastava parandi abil peaaegu elimineerida.)

3.3. Mõõtemääramatuse hindamise valemeid otsestel mõõtmistel

3.3.1. A-tüüpi määramatuse hindamine otsestel mõõtmistel

A-tüüpi määramatus leitakse kordusmõõtmistest. Kui mõõtmiste lõppresultaadiks on ühe ja sama suuruse x n-kordsel mõõtmisel leitud kõigi üksiktulemuste x_i aritmeetiline keskmine $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, siis selle A-tüüpi standardmääramatuseks $u_A(\bar{x})$ on aritmeetilise keskmise eksperimentaalne standardhälve:

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \tag{1}$$

Laiendmääramatus avaldub üldkujul järgnevalt:

$$U(x) = k\, u(x), \tag{2}$$

kus k on tõenäosusjaotusest sõltuv kattetegur ja $u(x)$ standardmääramatus.

Kui juhuslikud mõõtehälbed (kõrvalekalded aritmeetilisest keskmisest) on jaotunud normaalselt, siis saab aritmeetilise keskmise A-tüüpi laiendmääramatuse leida järgmiselt:

$$U_A(\bar{x}) = t_{\nu,\beta}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \tag{3}$$

kus katteteguriks k on Studenti tegur $t_{\nu,\beta}$, mille väärtused on toodud tabelis 1.

3.3.2. B-tüüpi määramatuse hindamine otsestel mõõtmistel

B-tüüpi hindamismeetodi kasutamine tähendab mõõtemääramatuse nende komponentide leidmist, mille jaoks eksperimentaator kordusmõõtmisi ei teinud. See hinnang baseerub mujalt pärineval infol, kusjuures sageli lähtutakse *a priori* oletusest, et vastav suurus allub mingile tõenäosusjaotusele. Füüsika praktikumis saadakse seda tüüpi määramatuse leidmiseks vajalik info kas mõõtevahendi passist või numbrilaualt, stendil paiknevast vastavast tabelist, katseseadme iseärasustest, mõõtmismetoodikast, kogemustest või lihtsalt arukatest kaalutlustest.

Mõõtevahendi suurimast lubatud näiduhälbest e lubatud piirhälbest tingitud B-tüüpi standardmääramatus $u_B(x)_m$ (vastab 1σ-le; σ on standardhälve) on leitav järgmisest valemist, mis eeldab näiduhälbe normaalset jaotust ja piirhälbe vastavust 3σ-le:

$$u_B(x)_m = \frac{e_p}{3}, \tag{4}$$

kus e_p on suurim lubatud näiduhälve e lubatud piirhälve.

Vastav B-tüüpi laiendmääramatus usaldatavusega β avaldub:

$$U_B(x)_m = t_{\infty,\beta}\frac{e_p}{3}, \tag{5}$$

kus $t_{\infty,\beta}$ on Studenti tegur (tabel 1).

Tabel 1

Valik teguri $t_{\nu,\beta}$ väärtusi

ν	β				
	0,5	0,68	0,95	0,975	0,9973
1	1,00	1,8	12,7	12,7	235,8
2	0,82	1,3	4,3	4,3	19,2
3	0,77	1,2	3,2	3,2	9,2
4	0,74	1,1	2,8	2,8	6,6
5	0,73	1,1	2,6	2,6	5,5
6	0,72	1,1	2,5	2,4	4,9
7	0,71	1,1	2,4	2,4	4,5
8	0,71	1,1	2.3	2,3	4,3
9	0,70	1,1	2.3	2,3	4,1
10	0,70	1,1	2,2	2,2	4,0
20	0,69	1,0	2,1	2,1	3,4
∞	0,67	1,0	2,0	2,0	3,0

Indeks $\nu = n-1$ on vabadusastmete arv ja β on tõenäosus.

Lugemi ümardamise tagajärjel tekkinud B-tüüpi standardmääramatus $u_B(x)_l$ avaldub ümardamisel tekkiva mõõtehälbe ühtlase jaotuse korral järgnevalt:

$$u_B(x)_l = \frac{l}{\sqrt{3}} \tag{6}$$

ja vastav B-tüüpi laiendmääramatus järgnevalt:

$$U_B(x)_l = \beta \cdot l\,, \tag{7}$$

kus β on usaldatavus ja l on suurim mõõtehälve, mis ümardamisel võib tekkida. Näiteks, kui ümardati skaala täisjaotisteni, siis on l-iks pool jaotise väärtust.

Lugemi ümardamisest tingitud B-tüüpi määramatust ei arvutata, kui sooritatakse ühe ja sama suuruse kordusmõõtmised ning arvutatakse A-tüüpi määramatus. Siis jääb ümardamisest tingitud mõõtehälve juhuslike hälvete hulka, mille on hõlmanud A-tüüpi määramatus.

Kui on põhjust arvata, et mõõtevahendi näiduhälbed jaotuvad ühtlaselt, siis arvutatakse tema ebatäpsusest tingitud B-tüüpi standard- ja laiendmääramatus samuti valemite (6) ja (7) järgi, kusjuures l-iks on siis suurim lubatud näiduhälve (lubatud piirhälve).

3.3.3. Liitmääramatuse hindamine otsestel mõõtmistel

Korduvalt tehtud otseste mõõtmiste korral avaldub liit(standard)määramatus järgnevalt:

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)_m}\ . \tag{8}$$

Ühekordsete otseste mõõtmiste juhul (A-tüüpi määramatust siis hinnata ei saa) leitakse ainult B-tüüpi liit(standard)määramatus:

$$u_c(x) = \sqrt{u_B^2(x)_m + u_B^2(x)_l}\ . \tag{9}$$

$u_c(x)$ on valemites (8) ja (9) ning edaspidi liitmääramatuse tähis (c – *combined*).

3.3.4. Laiendatud liitmääramatuse hindamine otsestel mõõtmistel

Korduvate otseste mõõtmiste tulemuse (aritmeetilise keskmise) laiendatud liitmääramatuse usaldusnivool β arvutame, arvestades eespool antud laiendatud liitmääramatuse ligikaudse arvutamise võtet, järgmise valemi järgi:

$$U_c(\bar{x}) = \sqrt{[U_A(\bar{x})]^2 + \left(t_{\infty,\beta}\frac{e_p}{3}\right)^2}\,, \tag{8a}$$

kus $U_A(\bar{x})$ leiame valemist (3). Seejuures tuleb mõlemad osamääramatused leida samal usaldusnivool β.

Ühekordse otsese mõõtmise tulemuse laiendatud liitmääramatuse usaldusnivool β hindame aga, arvestades valemeid (5) ja (7), järgmise valemi järgi:

$$U_c(x) = \sqrt{\left(t_{\infty,\beta}\frac{e_p}{3}\right)^2 + (\beta \cdot l)^2}\,. \tag{9a}$$

3.4. Määramatuse hindamise valemeid kaudsel mõõtmisel

3.4.1. Liitmääramatuse hindamine kaudsel mõõtmisel

Kui kaudse mõõtmise korral on mõõtetulemus (otsitav väljundsuurus) y mitme otseselt mõõdetud sõltumatu suuruse e sisendsuuruse $x_1, x_2, ..., x_k$ funktsioon

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_k),$$

siis väljundsuuruse y liit(standard)määramatus $u_c(y)$ on leitav valemiga:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_2)\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}u(x_k)\right)^2}\,, \tag{10}$$

kus $u(x_i)$ on sisendsuuruse x_i standardmääramatus ja $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ on y osatuletis x_i järgi e tundlikkustegur.

Sõltuvate (korreleeruvate) sisendsuuruste korral vaatleme kõige lihtsamat juhtu, kui on tegemist vaid kahe sisendsuurusega:

$$y = f(x_1, x_2).$$

Sel korral leitakse väljundsuuruse y määramatus järgmise valemiga:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}u(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_2)\right)^2 + 2k_{12}\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}u(x_1)u(x_2)}\,, \tag{11}$$

kus k_{12} on sisendsuuruste x_1 ja x_2 vahelise korrelatsiooni tegur. Kui $k_{12} = \pm 1$, siis on x_1 ja x_2 vahel lineaarne sõltuvus. Plussmärk tähendab, et sõltuvus on samasuunaline, miinus, et vastassuunaline (ühe suuruse kasvades, teine kahaneb).

3.4.2. Laiendatud liitmääramatuse hindamine kaudsel mõõtmisel

Kaudse mõõtmise korral, nagu teame, on mõõtetulemus (väljundsuurus y) funktsionaalselt seotud otseselt mõõdetud ehk sisendsuurustega $x_1, x_2, ..., x_k$:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Väljundsuuruse y laiendatud liitmääramatus sõltumatute sisendsuuruste korral leitakse siin ligikaudselt valemiga (10) analoogilise valemi abil:

$$U_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}U(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}U(x_2)\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}U(x_k)\right)^2}\,, \tag{10a}$$

kus $U(x_1) \ldots U(x_k)$ on sisendsuuruste x_1 ... x_k ühe ja sama tõenäosusega laiendmääramatused ja $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ on y osatuletis x_i järgi e tundlikkustegur. Niimoodi hinnatud laiendatud liitmääramatuse tõenäosus loetakse võrdseks sisendsuuruste laiendmääramatuste tõenäosusega.

Kahe sõltuva sisendsuuruse korral leitakse väljundsuuruse y laiendatud liitmääramatuse arvutusvalem lähtudes valemist (11). Sel juhul:

$$U_c(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}U(x_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}U(x_2)\right)^2 + 2k_{12}\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}U(x_1)U(x_2)}\,, \tag{11a}$$

kus $U(x_1)$ ja $U(x_2)$ on sisendsuuruste x_1 ja x_2 ühe ja sama tõenäosusega laiendmääramatused.

Märkus. Kaudsete mõõtmiste aritmeetilise keskmise A-tüüpi määramatust hinnatakse praktikumis samamoodi kui otseste mõõtmiste oma (valemid (1) ja (3)).

3.5. Lihtsustusvõtted määramatuse arvutamisel

Kui kaudsel mõõtmisel on suurus y avaldatav mistahes astmenäitajal otseselt mõõdetud sõltumatute suuruste korrutisena

$$y = x_1^p \cdot x_2^q \cdot \ldots \cdot x_k^r\,,$$

siis liitmääramatuse $u_c(y)$ võib leida ilma osatuletisi kasutamata suhtelise liitmääramatuse valemist:

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(p\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(q\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(r\frac{u(x_k)}{x_k}\right)^2}\,. \tag{12}$$

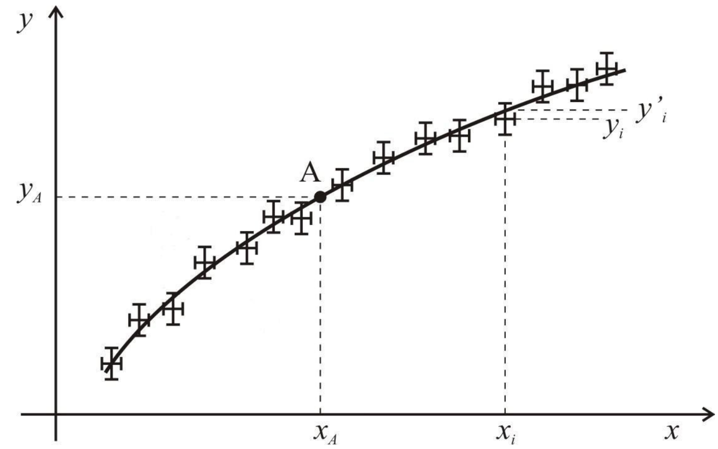
Määramatuse hinnangute valemites võib ära jätta need liidetavad, millest igaühe kohta jääb summasse üks temast vähemalt 3,3 korda suurem määramatus (enne ruutu tõstmist).

Loendamisel saadud arvud loetakse veatuteks (nende määramatus võrdub nulliga). Ülemaailmsed konstandid (valguse kiirus, Plancki konstant, elektroni laeng jne) võetakse nii kõrge täpsusega, et nende määramatust pole vaja arvestada.

4. Mõõtmistulemuste graafiline analüüs

Füüsikalistes katsetes mõõdetakse sageli kahte suurust x ja y, millest üks on teise funktsioon $y = f(x)$. Kajastagu nendevahelist sõltuvust joonisel 1 esitatud graafik. Üldjuhul on graafikuks sile, ilma murdepunktideta kõver. Selle saamiseks tuleb kõigepealt katsepunktidele teljesuunaliste sirglõikudena märkida usaldusalad. Lihtsal, ligikaudsel juhul on vaja nendest selline sile kõver läbi tõmmata, mis oleks katsepunktidele kõige lähemal ja läbiks samas kõiki usaldusalasid.

Joonisel 1 asuva lähenduskõvera mingi punkti A ordinaadi määramatuse leidmiseks fikseeritakse tema abstsiss (näiteks x_A) ja mõõdetakse punkti A ümbruses sümmeetriliselt asetseva n katsepunkti hälbed lähendusjoonest y-telje sihis $(y_i - y_i')$.



Joonis 1. Katsepunktide lähendamine sileda kõveraga.

Siin on y_i katsepunkti ordinaat kohal x_i ja y'_i lähendusjoonel oleva punkti ordinaat sama x_i kohal. Fikseeritud abstsissi x_A määramatus loetakse võrdseks nulliga, ordinaadi y_A A-tüüpi laiendmääramatus $U_A(y_A)$ arvutatakse aga valemiga [eeldades, et hälbed $(y_i - y'_i)$ on jaotunud normaaljaotuse järgi]:

$$U_A(y_A) = t_{n-2,\beta}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y'_i)^2}{n(n-2)}} . \tag{13}$$

Täpsemaks, aga samal ajal keerukamaks ja arvutuslikult töömahukamaks meetodiks lähendusjoone leidmisel on nn vähimruutude meetod. Selle meetodiga leitakse lähendusjoon, millest katsepunktide kõrvalekallete ruutude summa oleks minimaalne.

Eeldame mõõdetud suuruste x_i ja y_i vahelist lineaarset sõltuvust:

$$y_i = \alpha\, x_i + \beta\, . \tag{14}$$

Suuruste α ja β hinnangud – lähendussirge tõus *a* ja vabaliige *b* leitakse valemitega:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} , \tag{15}$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} , \tag{16}$$

kus $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ on x_i ja y_i aritmeetilised keskmised.

Füüsika praktikumi töödes huvitab meid sageli sirge tõus, kuid vahel ka vabaliige, mistõttu tuleb osata hinnata ka nende määramatusi. Tõusu a A-tüüpi laiendmääramatuse saame leida järgmise valemi abil (eeldades, et hälbed $[y_i - (a \cdot x_i + b)]$ on jaotunud normaaljaotuse järgi):

$$U_A(a) = t_{n-2,\beta}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - a \cdot x_i - b)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} . \tag{17}$$

Vabaliikme *b* laiendmääramatuse $U_A(b)$ hindamiseks kehtib järgmine valem:

$$U_A(b) = t_{n-2,\beta}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\cdot x_i - b)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}. \tag{18}$$

Füüsika praktikumis on katseandmete sirgega lähendamiseks kasutusel spetsiaalne programm "Lineaarne regressioon", mille juhendi võib leida e-võrgust.

Sellist graafilist analüüsi võib teha ka MS Excelis, kus tuleb täidetud tabeli korral menüüst valida **Tools→Data Analysis→Regression**. Valiku tulemusena avaneb sisestusaken, milles saab määrata funktsiooni y väärtuste ploki (**Input Y-Range**), argumendi x väärtuste ploki (**Input X-Range**), usaldusnivoo (**Confidence Level**) ja tulemuste väljastamiskoha (**Output options**). Regressioonanalüüsi rakendamise tulemusena tekib kolm tabelit, millest viimases on antud vabaliige (**Intercept**) ja sirge tõus (**X Variable**) koos oma standardmääramatustega (**Standard Error**). Lisaks on kolmanda tabeli eelviimases ja viimases tulbas antud vabaliikme ning sirge tõusu alumised ja ülemised usalduspiirid, mis vastavad antud usaldusnivoole. Usaldusvahemiku laiuse leidmiseks tuleb ülemisest usalduspiirist lahutada alumine. Laiendmääramatuseks on siin usaldusvahemiku poollaius.

Graafik tuleb teha eraldi, sest eelneva protseduuriga see automaatselt ei ilmu.

5. Aritmeetilised tehted ligikaudsete arvudega. Lõppresultaadi esitusviis

5.1. Kehtivad numbrid

Kehtivateks numbriteks nimetatakse kõiki numbreid 1, 2, 3, ..., 9 ja 0, kui see asub numbrite 1...9 vahel või täisarvu ja kümnendmurru lõpus. <u>Nulle kümnendmurru numbritest vasakul ei loeta kehtivateks numbriteks.</u> Näiteks arvus 0,07205 on neli kehtivat numbrit, esimeseks kehtivaks numbriks on siin 7, viimaseks 5; arvus 30,510 on aga kokku viis kehtivat numbrit – kõik numbrid on kehtivad. Veel üheks näiteks olgu täisarv 2400, kus on neli kehtivat numbrit. Kui nullid asuvad arvu lõpus ja ei ole kehtivad, st nad näitavad ainult arvu suurusjärku, siis kirjutatakse arv kümne astme abil. Näiteks, kui arvus 400 ei näita lõpus olevad nullid täpsust, vaid suurusjärku, siis esitatakse ta kujul: $400 = 4\cdot 10^2$ või $0{,}4\cdot 10^3$.

5.2. Tehted mõõtarvudega

Kõigi aritmeetiliste tehete resultaadid leitakse <u>ühe võrra suurema</u> kehtivate numbrite arvuga, kui on mõõtarvudel kehtivaid numbreid.

Kui kõik mõõtarvud ei ole ühesuguse kehtivate numbrite arvuga, siis suurema kehtivate numbrite arvuga andmed ümardatakse nii, et numbreid jääks ühe võrra rohkem kui kõige väiksema kehtivate numbrite arvuga mõõtarvul.

5.3. Mõõtarvu määramatuse ümardamine

Mõõtarvu määramatus tuleb anda üldjuhul kahe kehtiva numbriga. Otsese mõõtmise tulemuse määramatuses ei esitata aga neid kümnendkohti, mida mõõtmisel ei määratud.

5.4. Lõpptulemuse esitusviis

Mõõtarv ümardatakse tema määramatuse arvulise hinnangu viimase kehtiva numbrini. Lõpptulemusele lisatakse selle usaldatavus.

6. Arvulisi näiteid mõõtemääramatuse hindamise kohta erinevatel juhtudel

Näide 1. Üldmõõtmised

Mõõdeti metallplaadi paksust d seitsmest eri kohast. Tulemused kanti tabeli 2 teise veergu. Mõõtevahendiks oli kruvik, mille lubatud piirhälve on 0,004 mm.

Tabel 2

Katse nr.	d_i, mm	$(d_i - \overline{d}) \cdot 10^3$ mm	$(d_i - \overline{d})^2 \cdot 10^6$ mm^2
1	8,15	-29	841
2	8,20	21	441
3	8,17	-9	81
4	8,16	-19	361
5	8,21	31	961
6	8,16	-19	361
7	8,20	21	441

Aritmeetiline keskmine $\overline{d} = \frac{\sum_i^n d_i}{n}$ = 8,179, kus $n = 7$

Nüüd leiame plaadipaksuse laiendatud liitmääramatuse valemi (8a) kohaselt (tabelist 1: $t_{\nu,\beta}$= 2,5; $t_{\infty,\beta}$ = 2,0; β = 95%; $\nu = n$ -1):

$$U_C(\overline{d}) = \sqrt{U_A^2(\overline{d}) + U_B^2(d)_m} = 0{,}0230 \text{ mm},$$

kus

$$U_A(\overline{d}) = t_{\nu,\beta} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (d_i - \overline{d})^2}{n(n-1)}} = 0{,}0228 \text{ mm} \quad \text{(valem 3)}$$

ja

$$U_B(x)_m = t_{\infty,\beta} \frac{e_p}{3} = 0{,}00267 \text{ mm}, \quad \text{(valem 5)}$$

kus e_p on mõõteriista lubatud piirhälve ning $t_{\nu,\beta}$ ja $t_{\infty,\beta}$ on Studenti tegurid

Lõpptulemus kirjutatakse kujul: $\overline{d}$ = 8,179±0,023 mm, usaldatavusega 95%

Näide 2.

Olgu vaja määrata metallvarda tihedus ρ. Sel eesmärgil mõõdeti kruvikuga varda diameeter d viiest eri kohast ja saadi tulemused: 2,05; 2,08; 2,06; 2,06; 2,07 mm. Varda pikkuseks saadi metalljoonlauaga mõõtes: $l = 34{,}4$ cm. Varda kaalumine andis tulemuseks: $m = 10{,}24$ g. Näites 1 esitatud arvutuste eeskujul leiti, et $\bar{d}$ = 2,064±0,015 mm, usaldatavusega 0,95.

Kuna kruviku lubatud piirhälve on 4µm = 0,004 mm, siis laiendatud liitmääramatus $U_C(\bar{d})$ arvutati valemite (8a), (3) ja (5) kohaselt (tabelist 1: $t_{\nu,\beta}$ = 2,8; $t_{\infty,\beta}$ = 2,0; β = 95%; $\nu = n$ -1):

$$U_C(\bar{d}) = \sqrt{0{,}0143^2 + (2{,}0 \cdot \frac{0{,}004}{3})^2} = 0{,}0145 \text{ mm}$$

Praktikumi stendilt leiti metallmõõtejoonlaua lubatud piirhälve: ≈30cm pikkuse lõigu mõõtmisel oli see 0,10 mm. Kuna aga mõõtmisel ei hinnatud millimeetri kümnendikke (ei olnud võimalik nii täpselt fikseerida varda otste asendit joonlaual), siis tuli arvestada ka mõõtehälvet, mis on pool joonlaua jaotise väärtust ehk antud näites l = 0,5mm. Valemite (5) ja (7) ning määramatuste liitmiste eeskirja (9a) abil leiti:

$$U_C(l) = \sqrt{(2{,}0 \cdot \frac{0{,}10}{3})^2 + 2 \cdot (0{,}95 \cdot 0{,}5)^2} = 0{,}675 \text{ mm}$$

Lugemi ümardamisest tingitud B-tüüpi määramatus ($U_B(x)_l = \beta \cdot l$) võeti siin kahekordselt arvesse, sest määramatus esineb ühesugusena varda mõlema otspunkti asendi määramisel. Mõõdetav suurus on määratav nendele asenditele vastavate lugemite vahena, vahe korral aga määramatuse ruudud liituvad. Seega $l = 34{,}40$±0,07 cm, usaldatavusega 0,95.

(Märkus: Antud juhul ei ole mõistlik määramatus esitada kahe kehtiva numbriga, sest juba esimene mõjub mõõtarvu kümnendkohas, mida mõõtmisel ei ole määratud).

Varda kaalumine teostati digitaalsel kaalul, mille lubatud piirhälve on 0,02g. Siis vastavalt valemile (5) saadi varda massi määramatuseks:

$$U_C(m) = 2{,}0 \cdot \frac{0{,}02}{3} = 0{,}013g, \quad \text{usaldatavusega 95\%.}$$

(Märkus: Lugemi ümardamisest tingitud B-tüüpi määramatust digitaalsel mõõtevahendil ei arvesta!)

Varda materjali tihedus arvutati valemist ;

$$\rho = \frac{4m}{\pi l d^2} = \frac{4 \cdot 10{,}24}{\pi \cdot 34{,}40 \cdot 2{,}064^2 \cdot 10^{-2}} = 8{,}897 \frac{g}{cm^3} \qquad (*)$$

Tiheduse määramatus arvutati valemi (10a) põhjal:

$$U_C(\rho)=\sqrt{(\frac{\partial\rho}{\partial m}U_C(m))^2+(\frac{\partial\rho}{\partial l}U_C(l))^2+(\frac{\partial\rho}{\partial d}U_C(\bar{d}))^2}$$

Selleks tuli leida osatuletised:

$$\frac{\partial\rho}{\partial m}=\frac{4}{\pi l d^2}\,;\ \frac{\partial\rho}{\partial l}=-\frac{4m}{\pi l^2 d^2}\,;\ \frac{\partial\rho}{\partial d}=-\frac{8m}{\pi l d^3}$$

Lihtsama lõppvalemi saamiseks jagati $U_C(\rho)$ algavaldisega (*).

Tulemuseks saadi:

$$\frac{U_C(\rho)}{\rho}=\sqrt{(\frac{U_C(m)}{m})^2+(\frac{U_C(l)}{l})^2+(2\cdot\frac{U_C(\bar{d})}{d})^2}$$

Järelikult

$$\frac{U_C(\rho)}{\rho}=\sqrt{(\frac{0{,}013}{10{,}24})^2+(\frac{0{,}07}{34{,}4})^2+(2\cdot\frac{0{,}015}{2{,}064})^2}=10^{-3}\sqrt{1{,}61+4{,}14+211{,}26}=14{,}73\cdot10^{-3}$$

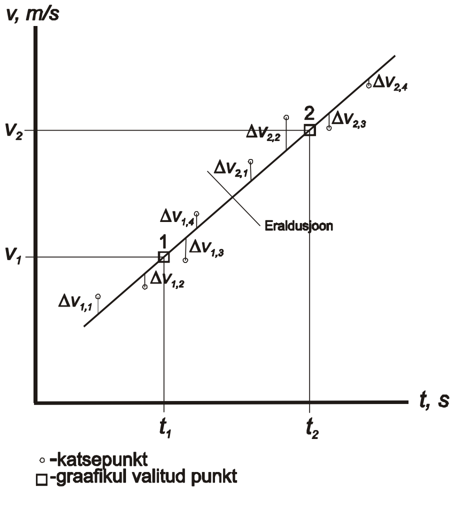
ja

$$U_C(\rho)=8{,}897\cdot0{,}0147=0{,}131\frac{g}{cm^3}\,.$$

Varda tihedus on: $\rho=8{,}90\pm0{,}13\frac{g}{cm^3}$, usaldatavusega 0,95

Näide 3.

Olgu vaja arvutada allpool oleva joonisel esitatud funktsiooni $v=f(t)$ graafiku sirge tõus ja tema määramatus. Selleks tuleb graafik poolitada nii, et kummalegi poole jääks ühepalju katsepunkte.



Seejärel valime punkti 1, mis asub eraldusjoonest vasakule poole jäävate katsepunktide keskel (sümmeetriliselt). Samamoodi valime ka punkti 2 paremal pool eraldusjoont. Valitud punktide järgi on sirge tõus a leitav:

$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

Nii arvutatud suurus on keha keskmine kiirendus lõigul 1-2.

Graafiku tõusu a määramatus $U_C(a)$ leitakse vastavalt eeskirjale (10a) valemiga:

$$U_C(a) = \frac{\sqrt{(U_A(v_1))^2 + (U_A(v_2))^2}}{t_2 - t_1}$$

eeldades, et nimetaja on konstantne.

Määramatuse $U_A(v_1)$ leidmiseks võtta vasakul pool eraldusjoont asuvad katsepunktid, vaadelda nende koordinaatide erinevusi graafikust (lähendussirgest). Tähistame need erinevused $\Delta v_{1,i}$. Need asendada valemisse (13).

Seega:

$$U_A(v_1) = t_{n-2,\beta}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta v_{1,i})^2}{n(n-2)}}\ ,$$

Määramatuse $U_A(v_2)$ leidmiseks võtta eraldusjoonest paremal pool asuvad punktid ja vaadelda nende koordinaatide erinevusi graafikust. Tähistame need erinevused $\Delta v_{2,i}$. Ning need samuti asendada valemisse (13).